

שאלון 35472 מועד חורף נבצרים תשפ"ב

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי
התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:

שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

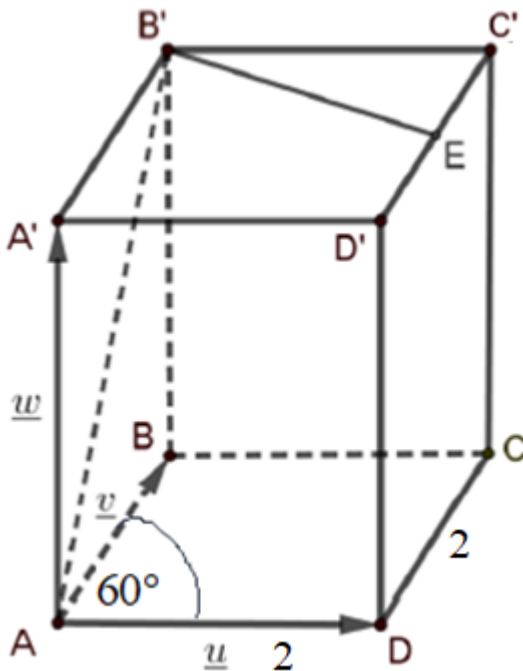
בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35472 מועד
חורף נבצרים תשפ"ב.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. בסיס המנסרה הישרה הוא מעוין, שאורך צלעו 2.

בהתאם המקצועות הצדדים מאונכים לבסיסים.

נרשום בינתיים את מה שידוע, ואת השאר נחשב בהמשך.



$$\overline{AD} = \underline{u} \quad |\underline{u}| = 2 \quad \underline{u}^2 = 4$$

$$\overline{AB} = \underline{v} \quad |\underline{v}| = 2 \quad \underline{v}^2 = 4$$

$$\overline{AA'} = \underline{w} \quad |\underline{w}| = ? \quad \underline{w}^2 = ?$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = ?$$

$$\underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{w}$$

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{v} \perp \underline{w}$$

מה עוד ניתן ללמוד מהנתונים?

$$\overline{C'E} = -\frac{1}{2}\underline{v} \quad \text{ולכן: } \overline{C'D'} \text{ היא אמצע המקצוע } C'D'$$

נביע את הווקטורים $\overline{B'E}$ ו- $\overline{B'A}$, באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

$$\overline{B'E} = \overline{B'C'} + \overline{C'E}$$

$$\overline{B'E} = \underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v}$$

$$\overline{B'A} = \overline{B'A'} + \overline{A'A}$$

$$\overline{B'A} = -\underline{v} - \underline{w}$$

$$\text{תשובה: } \overline{B'A} = -\underline{v} - \underline{w}, \quad \overline{B'E} = \underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v}$$

ב. נבדוק את שלוש הטענות.

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \quad (1)$$

הטענה אינה נכונה, כי הזווית שבין צלעות המעוין היא $\angle BAD = 60^\circ$, כלומר $\angle(\underline{u}, \underline{v}) = 60^\circ$.

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

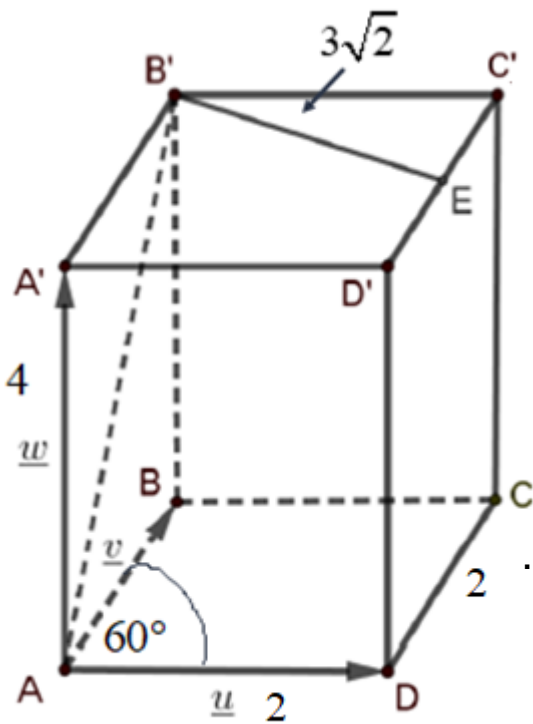
תשובה: הטענה אינה נכונה, $\underline{u} \cdot \underline{v} = 2$.

$$\underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \quad (2)$$

הטענה נכונה, כי במנסרה הישרה המקצועות הצדדיים מאונכים לבסיסים.

תשובה: הטענה נכונה, $\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$.

(3) $\overrightarrow{B'A}$ מאונך ל- $\overrightarrow{B'E}$.



$$\overrightarrow{B'A} \cdot \overrightarrow{B'E} = (-\underline{v} - \underline{w}) \cdot (\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v})$$

$$\overrightarrow{B'A} \cdot \overrightarrow{B'E} = -\underline{u} \cdot \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{v}^2 + \frac{1}{2}\underline{u} \cdot \underline{v} \leftarrow \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

$$\overrightarrow{B'A} \cdot \overrightarrow{B'E} = -2 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2$$

$$\overrightarrow{B'A} \cdot \overrightarrow{B'E} = 0 \rightarrow \boxed{\overrightarrow{B'A} \perp \overrightarrow{B'E}}$$

תשובה: הטענה נכונה, $\overrightarrow{B'A}$ מאונך ל- $\overrightarrow{B'E}$.

ג. נחשב את אורך הגובה של המנסרה.

נפח המנסרה הוא $8\sqrt{3}$ שווה למכפלת שטח הבסיס בגובה המנסרה.

שטח בסיס מנסרה הוא:

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD$$

$$S_{ABCD} = 2 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$$

גובה מנסרה הוא:

$$H = \frac{8\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 4$$

תשובה: אורך הגובה של המנסרה הוא 4.

ד. משמאל, עדכון של כל המידע שצברנו.

(1) נחשב את אורך הווקטור $\overrightarrow{B'E}$.

$$|\overrightarrow{B'E}| = \left| \underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} \right|$$

$$|\overrightarrow{B'E}| = \sqrt{\underline{u}^2 + \frac{1}{4}\underline{v}^2 - \underline{u} \cdot \underline{v}}$$

$$|\overrightarrow{B'E}| = \sqrt{4 + \frac{1}{4} \cdot 4 - 2}$$

$$\boxed{|\overrightarrow{B'E}| = \sqrt{3}}$$

תשובה: אורך הווקטור $\overrightarrow{B'E}$ הוא $\sqrt{3}$.

$$\boxed{\overrightarrow{AD} = \underline{u}} \quad \boxed{|\underline{u}| = 2} \quad \boxed{\underline{u}^2 = 4}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \underline{v}} \quad \boxed{|\underline{v}| = 2} \quad \boxed{\underline{v}^2 = 4}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AA'} = \underline{w}} \quad \boxed{|\underline{w}| = 4} \quad \boxed{\underline{w}^2 = 16}$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 2$$

$$\underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{w}$$

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{v} \perp \underline{w}$$

(2) נחשב את שטח המשולש $AB'E$, $\angle AB'E = 90^\circ$.

תכנון: $S_{\triangle AB'E} = 0.5 \cdot B'A \cdot B'E$

נחשב את אורך הווקטור $\overrightarrow{B'A}$.

$$\overrightarrow{AD} = \underline{u} \quad |\underline{u}| = 2 \quad \underline{u}^2 = 4$$

$$\overrightarrow{AB} = \underline{v} \quad |\underline{v}| = 2 \quad \underline{v}^2 = 4$$

$$\overrightarrow{AA'} = \underline{w} \quad |\underline{w}| = 4 \quad \underline{w}^2 = 16$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 2$$

$$\underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{w}$$

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{v} \perp \underline{w}$$

$$\overrightarrow{B'A} = -\underline{v} - \underline{w}$$

$$|\overrightarrow{B'A}| = \sqrt{(-\underline{v} - \underline{w})^2}$$

$$|\overrightarrow{B'A}| = \sqrt{\underline{v}^2 + \underline{w}^2}$$

$$|\overrightarrow{B'A}| = \sqrt{4 + 16}$$

$$|\overrightarrow{B'A}| = 2\sqrt{5}$$

(את אורך $\overrightarrow{B'A}$ ניתן גם לחשב גם במשפט פיתגורס ב- $\triangle ABB'$).

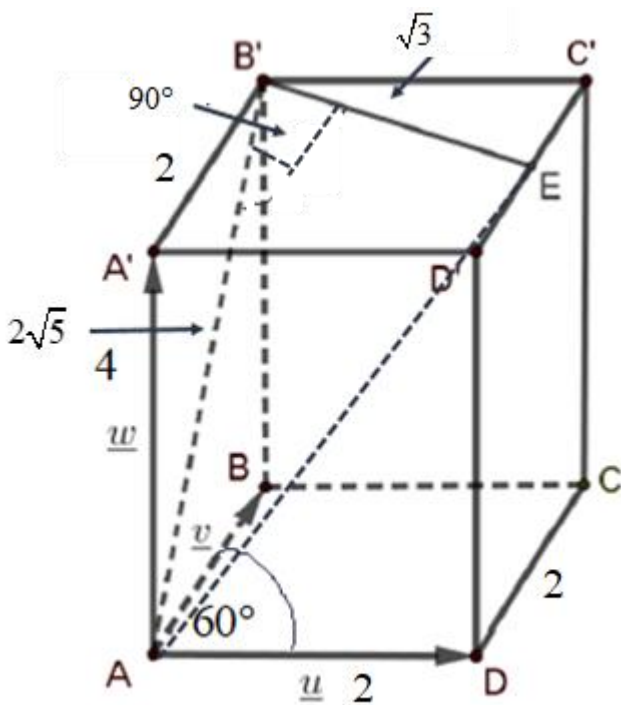
נחשב את שטח המשולש $AB'E$.

$$S_{\triangle AB'E} = 0.5 \cdot B'A \cdot B'E$$

$$S_{\triangle AB'E} = 0.5 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$$

$$S_{\triangle AB'E} = \sqrt{15}$$

תשובה: שטח משולש $AB'E$ הוא $\sqrt{15}$.



א. המחקר בדק את הקשר בין טמפרטורת המים (x), ובין כמות המדוזות (y).

האוכלוסייה שנבדקה היא 30 זוגות נתונים.

התוצאות שהתקבלו הן: ממוצע טמפרטורת המים $\bar{x} = 26.5^\circ$, עם סטיית תקן של $S_x = 3.5^\circ$,

וממוצע כמות המדוזות $\bar{y} = 14$, עם סטיית תקן של $S_y = 2.5$ מדוזות.

הניבוי הטוב ביותר לכמות המדוזות, כאשר טמפרטורת המים היא הטמפרטורה הממוצעת ($\bar{x} = 26.5^\circ$),

הוא הממוצע של כמות המדוזות ($\bar{y} = 14$).

נזכור, כמובן, שגם קו הרגרסיה עובר בנקודת הממוצעים.

תשובה: הניבוי לכמות המדוזות, כאשר טמפרטורת המים היא הטמפרטורה הממוצעת 26.5° ,

יהיה 14 מדוזות.

ב. נתון כי מקדם המתאם הוא $r = 0.8$.

זהו מקדם הקרוב למקדם הדטרמיניסטי ($r = 1$), ולכן הניבוי יהיה ניבוי טוב.

כיוון שמקדם המתאר הוא חיובי, אז ככל שהמשתנה המנבא X יגדל, גם המשתנה Y יגדל.

ומכאן, שככל שהטמפרטורה תעלה, גם צפוי שכמות המדוזות תגדל.

תשובה: היגד (3) נכון – ככל שהטמפרטורה עולה, נבא כמות גדולה יותר של מדוזות.

ג. נמצא את משוואת קו הרגרסיה לניבוי כמות המדוזות y לפי הטמפרטורה x .

$$\text{נמצא תחילה את שיפוע קו הרגרסיה: } m = r \cdot \frac{S_y}{S_x} = 0.8 \cdot \frac{2.5}{3.5} = \frac{4}{7}.$$

נמצא את משוואת קו הרגרסיה, שעובר בנקודת הממוצעים:

$$y - \bar{y} = m(x - \bar{x})$$

$$y - 14 = \frac{4}{7}(x - 26.5)$$

$$y - 14 = \frac{4}{7}x - 15\frac{1}{7}$$

$$\boxed{y = \frac{4}{7}x - 1\frac{1}{7}}$$

תשובה: משוואת קו הרגרסיה, לניבוי כמות המדוזות y לפי הטמפרטורה x , היא $y = \frac{4}{7}x - 1\frac{1}{7}$.

ד. נמצא מהו הניבוי לשיעור לכמות המדוזות y ביום שבו טמפרטורת המים היא 33° .

$$\text{נציב } x = 33, \text{ במשוואת קו הרגרסיה: } y = \frac{4}{7} \cdot 33 - 1\frac{1}{7} = 17\frac{5}{7} \approx 18$$

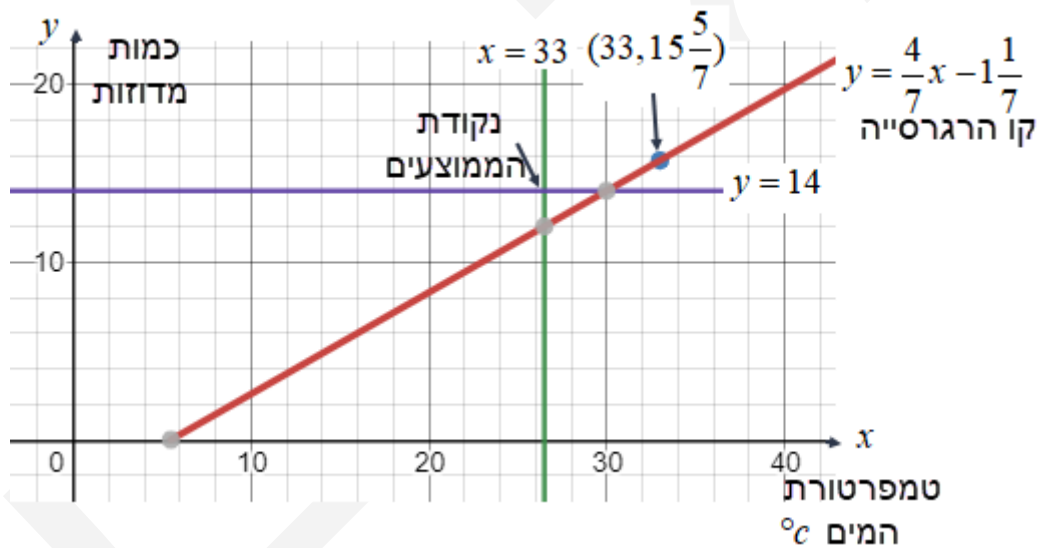
הערה – בפתרון סעיף זה, חבוייה הנחה שטמפרטורת מים של 33° הייתה בתחום,

שבו התקבלו נתונים על טמפרטורות המים.

לאור סטיית התקן של 3.5° , וממוצע של 26.5° , הרי שהנחה זו היא סבירה.

תשובה: הניבוי לכמות המדוזות, ביום שבו טמפרטורת המים היא 33° , הוא בערך 18 מדוזות.

העשרה



נוסחת הגדילה והדעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$, כאשר M_0 - הכמות ההתחלתית,

q הוא גורם הגדילה/דעיכה, M_t הכמות לאחר זמן t .

א. ביישוב א', הפונקציה המתארת את מספר הנדבקים בכל יום היא $M(t) = 10 \cdot 1.5^t$.

מכאן שמספר הנדבקים ההתחלתי הוא 10 וגורם הגדילה הוא $q = 1.5$ (פונקציה עולה).

ביישוב ב', הפונקציה המתארת את מספר הנדבקים בכל יום היא $G(t) = 100 \cdot 1.2^t$.

מכאן שמספר הנדבקים ההתחלתי הוא 100 וגורם הגדילה הוא $q = 1.2$ (פונקציה עולה).

לכן, גרף II מתאים ליישוב ב', שבו מספר הנדבקים ההתחלתי גדול יותר, וקצב הגדילה איתי יותר.

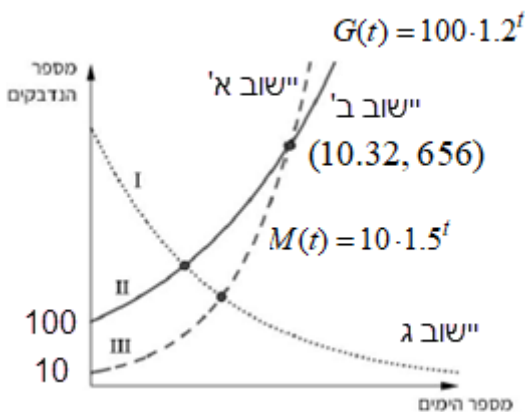
תשובה: יישוב א' - גרף III, יישוב ב' - גרף II.

ב. נחשב מה היה מספר הנדבקים ביישוב ב', לאחר 8 ימים.

$$G(8) = 100 \cdot 1.2^8 \approx 430$$

תשובה: מספר הנדבקים ביישוב ב', לאחר 8 ימים, היה בערך 430.

ג. נחשב לאחר כמה ימים מספר הנדבקים בשני היישובים היה שווה.



$$10 \cdot 1.5^t = 100 \cdot 1.2^t \quad / : 10 \cdot 1.2^t$$

$$\frac{1.5^t}{1.2^t} = 10 \rightarrow \left(\frac{1.5}{1.2}\right)^t = 10$$

$$1.25^t = 10$$

$$\ln 1.25^t = \ln 10$$

$$t \ln 1.25 = \ln 10$$

$$t = \frac{\ln 10}{\ln 1.25}$$

$$t \approx 10.32$$

(בבדיקה, נקבל שמספר הנדבקים השווה הוא בערך 656.)

תשובה: לאחר 10.32 ימים בערך (ביום ה- 11), מספר הנדבקים ביישוב א' וביישוב ב' היה שווה.

ד. ביישוב ג' מספר הנדבקים, בזמן הבדיקה הראשונית, היה גדול פי 40 ממספר הנדבקים ביישוב ב'.

מכאן שמספר הנדבקים, בספירה הראשונית ביישוב ג', היה $100 \cdot 40 = 4000$.

לאחר 8 ימים, ממתן התרופה הניסיונית שניתנה מייד לאחר בדיקה הראשונית,

היה מספר הנדבקים ביישוב ג', רבע מ- 430 הנדבקים ביישוב ב', כפי שמצאנו בסעיף הקודם,

כלומר: $\frac{1}{4} \cdot 430 \approx 108$ נדבקים.

נחשב בכמה אחוזים ירד מספר הנדבקים ביישוב ג', בכל יום, מאז מתן התרופה.

$$108 = 4000 \cdot q^8 \quad / : 4000$$

$$0.027 = q^8$$

$$\sqrt[8]{0.027} = q$$

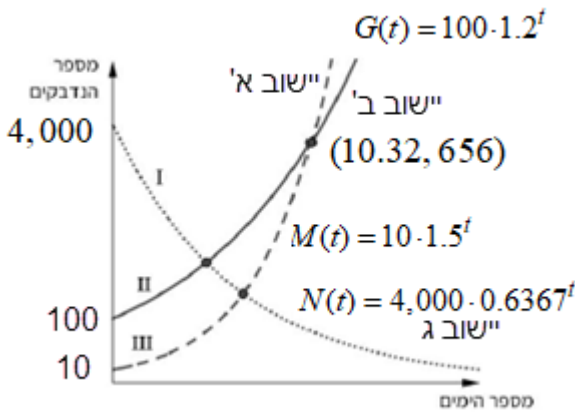
$$q = 0.6367$$

נמצא את אחוז הדעיכה היומי.

$$0.6367 = \frac{100 - P}{100} \quad / \cdot 100$$

$$63.67 = 100 - P$$

$$P = 36.33\%$$



(ביישוב ג', הפונקציה המתארת את מספר הנדבקים בכל יום היא $N(t) = 4,000 \cdot 0.6367^t$.)

תשובה: מספר הנדבקים ביישוב ג' ירד ב- 36.33% בכל יום.

ה. הוחלט לסגור את בתי הספר ביישוב בו מספר הנדבקים יגיע ל- 600 .

ביישוב ג', מספר הנדבקים כבר ביום הראשון הוא 4,000 ולכן בית הספר נסגר ביישוב זה.

לאחר 10 ימים, מספר הנדבקים ביישוב א' יהיה בערך $M(10) = 10 \cdot 1.5^{10} \approx 577$,

לכן לא ייסגרו בתי הספר ביישוב א' (למעשה, ייסגרו לאחר 11 ימים).

לאחר 10 ימים, מספר הנדבקים ביישוב ב' יהיה בערך $G(10) = 100 \cdot 1.2^{10} \approx 619$,

לכן סגרו את בתי הספר ביישוב ב'.

תשובה: כן, סגרו בתי הספר בשני יישובים, במהלך 10 הימים מהספירה הראשונית.

את בתי הספר ביישוב ג' סגרו כבר ביום הראשון, ואת בתי הספר ביישוב ב' סגרו ביום העשירי.

א. נתונה הפונקציה $f(x) = 2\ln(x^2 - a)$ ($a > 0$, פרמטר).

נתון כי שיפוע המשיק בנקודה $x = 5$ הוא 1.25, ולכן $f'(5) = 1.25$.

$$f'(x) = \frac{2 \cdot 2x}{x^2 - a}$$

$$1.25 = \frac{4 \cdot 5}{5^2 - a}$$

$$25 - a = 16$$

$$a = 9$$

ב. נציב $a = 9$, ונקבל $f(x) = 2\ln(x^2 - 9)$

נשים לב שהפונקציה זוגית, ולכן הגרף שלה סימטרי לציר ה- y (לא דורש הוכחה, אם לא מבקשים).

(1) נמצא את תחום ההגדרה: פונקציית ה- $\ln$ מקבלת מספרים חיוביים, בלבד.

$$x^2 - 9 > 0$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x = -3, 3$$

מתקבלת פרבולה בעלת מינימום ("צוחקת"), שתחום החיוביות שלה הוא $x > 3$, או $x < -3$.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $x > 3$, או $x < -3$.

(2) האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המאונכות לציר ה- x , מתקבלות עבור $x = 3$, ו- $x = -3$,

שכן כאשר הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית שואף לאפס, אז הפונקציה שואפת ל- $(-\infty)$.

תשובה: האסימפטוטות הן $x = 3$, ו- $x = -3$.

(3) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

$$f(x) = 2\ln(x^2 - 9)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{x^2 - 9}$$

$$4x = 0$$

$$x = 0$$

$$f'(4) = \frac{16}{+} > 0 \nearrow$$

$$f'(-4) = \frac{-16}{+} < 0 \searrow$$

תשובה: עלייה - $x > 3$, ירידה - $x < -3$.

(4) בנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x מתקיים $y = 0$.

$$0 = 2\ln(x^2 - 9)$$

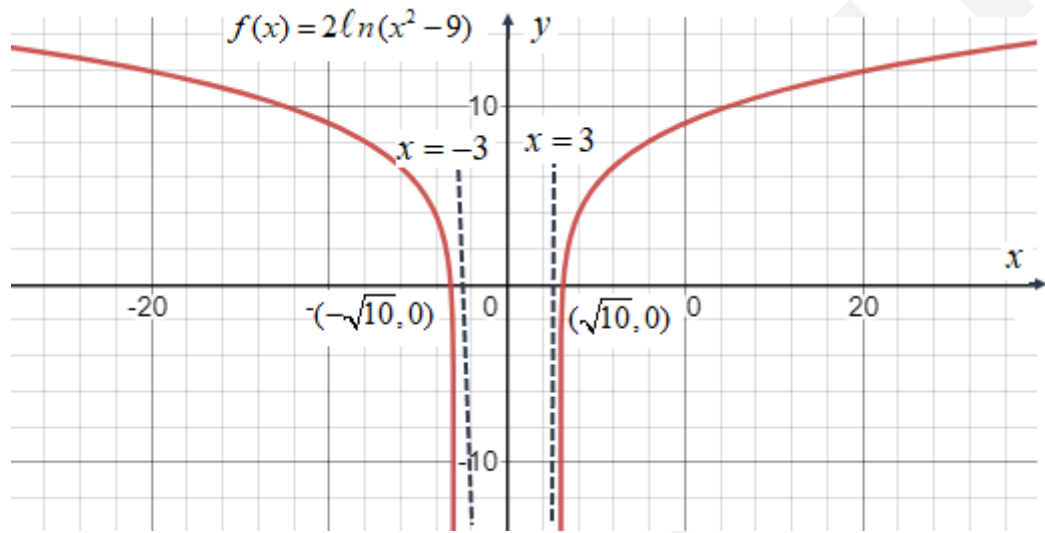
$$\ln(x^2 - 9) = 0 \rightarrow x^2 - 9 = e^0 = 1$$

$$x^2 = 10 \rightarrow (\sqrt{10}, 0), (-\sqrt{10}, 0)$$

אין נקודת חיתוך עם ציר ה- y , כי בתחום ההגדרה $x \neq 0$.

תשובה: $(-\sqrt{10}, 0), (\sqrt{10}, 0)$.

(5) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



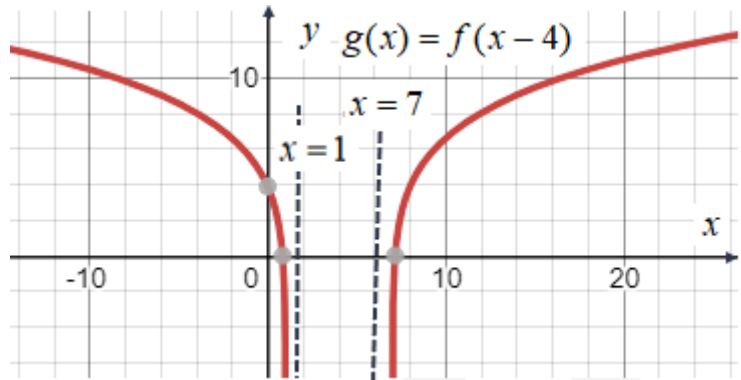
תשובה: הסקיצה מעל.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x-4)$.

זו הזזה אופקית, 4 יחידות ימינה של $f(x)$. תחום ההגדרה הוא $x > 7$, או $x < 1$.

האסימפטוטות הן $x=7$, ו- $x=1$, נקודות החיתוך עם ציר ה- x הן $(\sqrt{10}+4, 0)$, $(-\sqrt{10}+4, 0)$.

יש כבר נקודת חיתוך עם ציר ה- y , תחום עלייה - $x > 7$, ותחום ירידה - $x < 1$.



תשובה: הסקיצה מעל.

ד. כפי שאמרנו, $f(x) = 2\ln(x^2-9)$ היא פונקציה זוגית, ולכן הגרף שלה סימטרי לציר ה- y ($x=0$).

לאחר ההזזה האופקית 4 יחידות ימינה, מתקבלת הפונקציה $g(x) = f(x-4)$,

שכמובן שאינה כבר זוגית והגרף שלה סימטרי לישר $x=4$.

תשובה: הפונקציה $g(x) = f(x-4)$ היא לא זוגית ולא אי-זוגית.

א. הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ מוגדרות בתחום $x \neq -2$.

הגרף של $f'(x)$, הנתון בסרטוט, חותך את ציר ה- x בנקודה $(a, 0)$,

ועובר בנקודה זו משליליות לחיוביות,

ולכן $f(x)$ עוברת מירידה לעלייה, עבור $x = a$, וזו נקודת מינימום.

תשובה: $x = a$, מינימום.

ב. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^{2x}}{x+2}$.

תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $x \neq -2$.

נמצא את שיעורי נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(x+2) - e^{2x}}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(2x+4-1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}(2x+3)}{(x+2)^2}$$

$$0 = 2x + 3$$

$$x = -1.5 \rightarrow f(-1.5) = \frac{e^{-3}}{-1.5+2} = \frac{2}{e^3} \approx 0.1 \rightarrow \left(-1.5, \frac{2}{e^3} \approx 0.1\right)$$

סוג הקיצון נקבע, על פי סעיף א, כאשר בהתאם גם $a = -1.5$.

תשובה: $(-1.5, \frac{2}{e^3} \approx 0.1)$, מינימום, $a = -1.5$.

ג. את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$,

ניתן לרשום בהתאם לסימני הנגזרת $f'(x)$, המופעים בגרף הנתון.

תשובה: עלייה - $x > -1.5$, ירידה - $-2 < x < -1.5$ או $x < -2$.

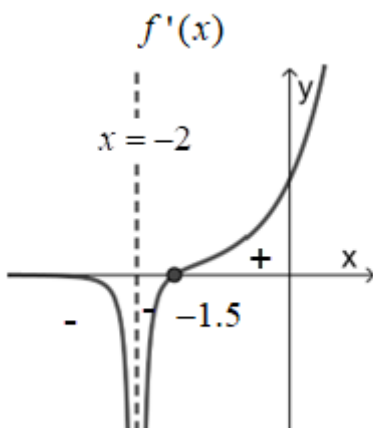
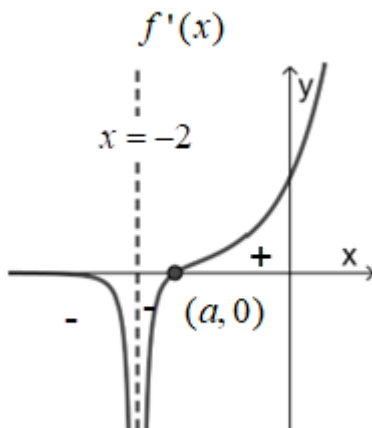
ד. בנקודת החיתוך עם ציר ה- y , מתקיים $x = 0$, ובהתאם $(0, 0.5)$.

בנקודות חיתוך עם ציר ה- x , מתקיים $y = 0$.

אולם, כיוון שמונה הפונקציה חיובי לכל x , אז אין נקודת חיתוך עם ציר ה- x .

תשובה: $(0, 0.5)$.

ה. משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- x היא $x = -2$.

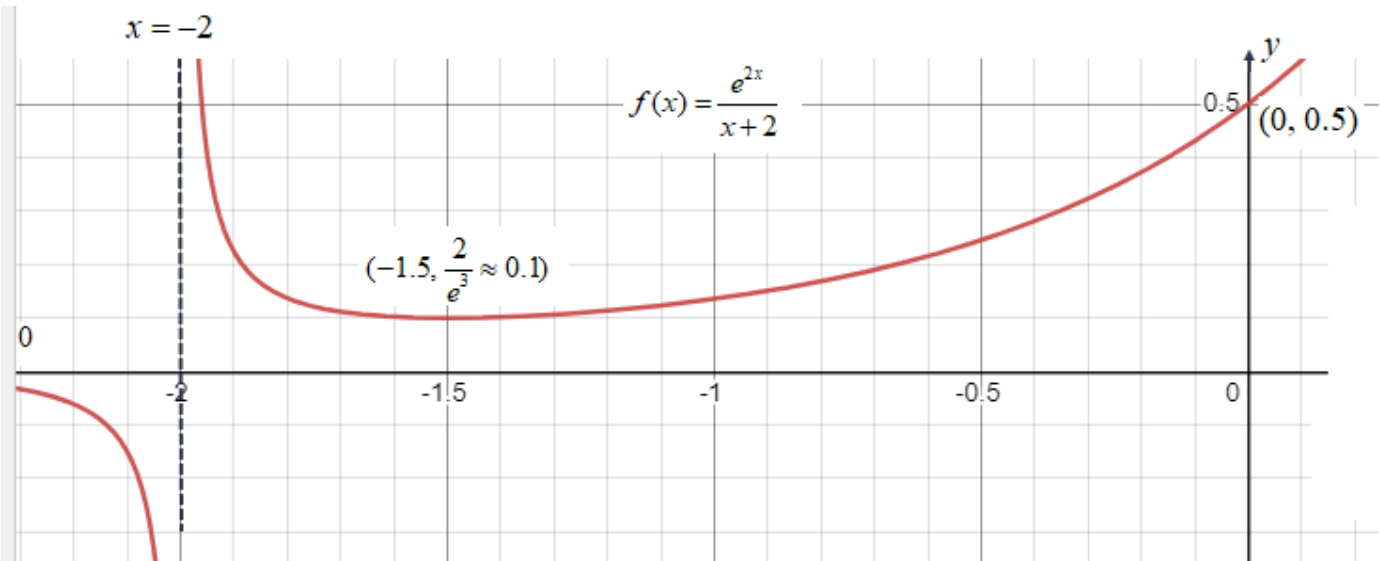


ו. נסרטט את גרף הפונקציה $f(x) = \frac{e^{2x}}{x+2}$.

שלוש הצבות זריזות לפני הסרטוט.

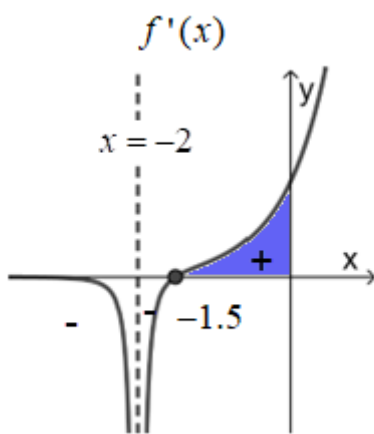
$f(5) = 3,146 \rightarrow +\infty$ ואין אסימפטוטה אופקית לימין.

$f(-5) = -1.51 \cdot 10^{-5} \rightarrow 0^-$ ו- $y=0$ אסימפטוטה אופקית לשמאל, עבור $x \rightarrow -\infty$.



תשובה: הסרטוט מעל.

ז. נחשב את השטח המבוקש, הצבוע בכחול משמאל.



$$S = \int_{-1.5}^0 (f'(x) - 0) dx$$

$$S = (f(x)) \Big|_{-1.5}^0$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0: 0.5 \\ x=-1.5: \frac{2}{e^3} \approx 0.1 \end{array} \right\} S = 0.5 - \frac{2}{e^3} \approx 0.4$$

תשובה: השטח המוגבל הוא $0.5 - \frac{2}{e^3} \approx 0.4$.