



מבחן לדוגמה 1, שאלון 35472

מועד קיץ תשפ"א

מורים יקרים,
להלן פתרון בחינת בגרות לדוגמה מהתוכנית החדשה.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. בסיס המנסרה הישרה מקבילית.

נציג את הנתונים (כולל חלק מתוצאות החישובים שנראה מאוחר יותר).

המנסרה ישרה, ובהתאם המקצועות הצדדים מאונכים לבסיסים.

$$\overrightarrow{AB} = \underline{u} \quad |\underline{u}| = 2 \quad \underline{u}^2 = 4$$

$$\overrightarrow{AD} = \underline{v} \quad |\underline{v}| = 1 \quad \underline{v}^2 = 1$$

$$\overrightarrow{AA'} = \underline{w} \quad |\underline{w}| = 4 \quad \underline{w}^2 = 16$$

$$\underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{w}$$

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{v} \perp \underline{w}$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 1$$

מה עוד ניתן ללמוד מהנתונים ?

$$DE : EC = 2 : 1 \rightarrow DE = \frac{2}{3} DC$$

$$\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3} \underline{u} \quad \overrightarrow{EC} = \frac{1}{3} \underline{u}$$

נביע את הווקטורים $\overrightarrow{ED'}$ ו- $\overrightarrow{EB}$, באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

$$\overrightarrow{ED'} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DD'}$$

$$\overrightarrow{ED'} = -\frac{2}{3} \underline{u} + \underline{w}$$

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{3} \underline{u} - \underline{v}$$

$$\text{תשובה: } \overrightarrow{EB} = \frac{1}{3} \underline{u} - \underline{v}, \quad \overrightarrow{ED'} = -\frac{2}{3} \underline{u} + \underline{w}$$

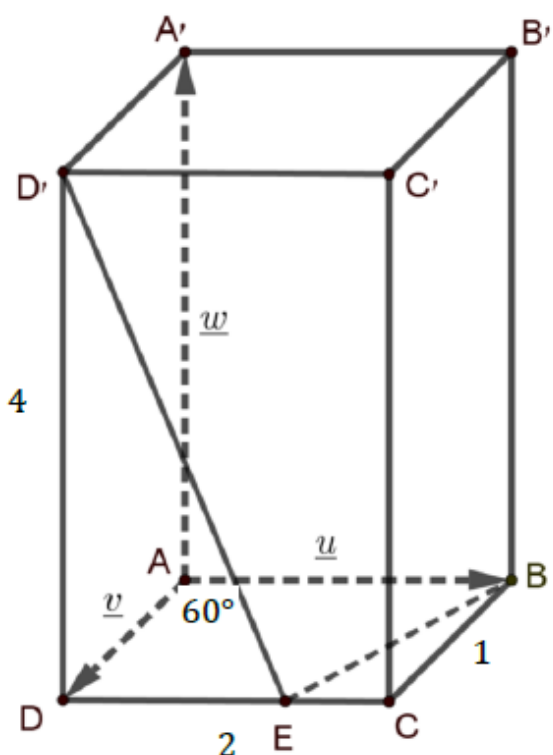
ב. (1) נחשב את $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \angle BAD$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 1$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 1 \quad \text{תשובה:}$$



(2) נחשב את אורך הווקטור $\overrightarrow{EB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \underline{u} \quad |\underline{u}| = 2 \quad \underline{u}^2 = 4$$

$$\overrightarrow{AD} = \underline{v} \quad |\underline{v}| = 1 \quad \underline{v}^2 = 1$$

$$\overrightarrow{AA'} = \underline{w} \quad |\underline{w}| = 4 \quad \underline{w}^2 = 16$$

$$\underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{w}$$

$$\underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{w}$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 1$$

$$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{3}\underline{u} - \underline{v}$$

$$|\overrightarrow{EB}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\underline{u} - \underline{v}\right)^2}$$

$$|\overrightarrow{EB}| = \sqrt{\frac{1}{9}\underline{u}^2 - \frac{2}{3}\underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v}^2}$$

$$|\overrightarrow{EB}| = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot 1 + 1} = \sqrt{\frac{7}{9}}$$

$$|\overrightarrow{EB}| = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$|\overrightarrow{EB}| = \frac{\sqrt{7}}{3} \text{ תשובה:}$$

ב. (1) נחשב את גודל הזווית $\angle D'EB$.

$$\cos \angle D'EB = \frac{\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED'}}{|\overrightarrow{EB}| \cdot |\overrightarrow{ED'}|} \text{ תכנון:}$$

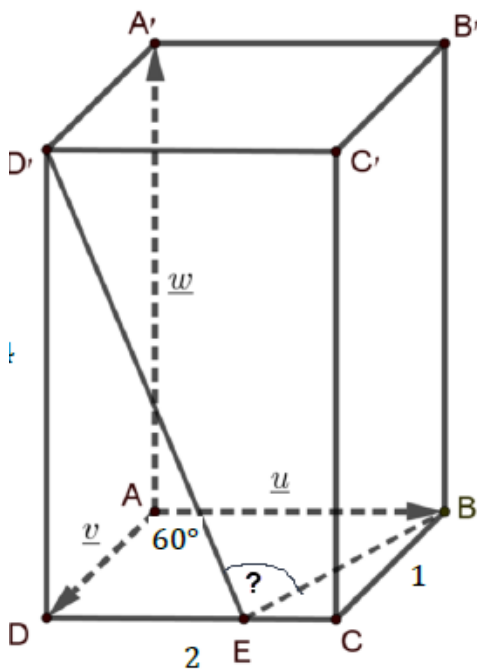
$$\overrightarrow{ED'} = -\frac{2}{3}\underline{u} + \underline{w}$$

$$|\overrightarrow{ED'}| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\underline{u} + \underline{w}\right)^2}$$

$$|\overrightarrow{ED'}| = \sqrt{\frac{4}{9}\underline{u}^2 - \frac{4}{3}\underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{w}^2}$$

$$|\overrightarrow{ED'}| = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot 4 - \frac{4}{3} \cdot 0 + 16} = \sqrt{\frac{160}{9}}$$

$$|\overrightarrow{ED'}| = \frac{4\sqrt{10}}{3}$$



$$\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED'} = \left(\frac{1}{3}\underline{u} - \underline{v}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\underline{u} + \underline{w}\right)$$

$$\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED'} = -\frac{2}{9}\underline{u}^2 + \frac{1}{3}\underline{u} \cdot \underline{w} + \frac{2}{3}\underline{u} \cdot \underline{v} - \underline{v} \cdot \underline{w}$$

$$\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED'} = -\frac{2}{9} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 - 0$$

$$\boxed{\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED'} = -\frac{2}{9}}$$

$$\cos \angle D'EB = \frac{\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED'}}{|\overrightarrow{EB}| \cdot |\overrightarrow{ED'}|}$$

$$\cos \angle D'EB = \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{4\sqrt{10}}{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{70}}$$

$$\boxed{\angle D'EB = 93.42^\circ}$$

תשובה: $\angle D'EB = 93.42^\circ$.

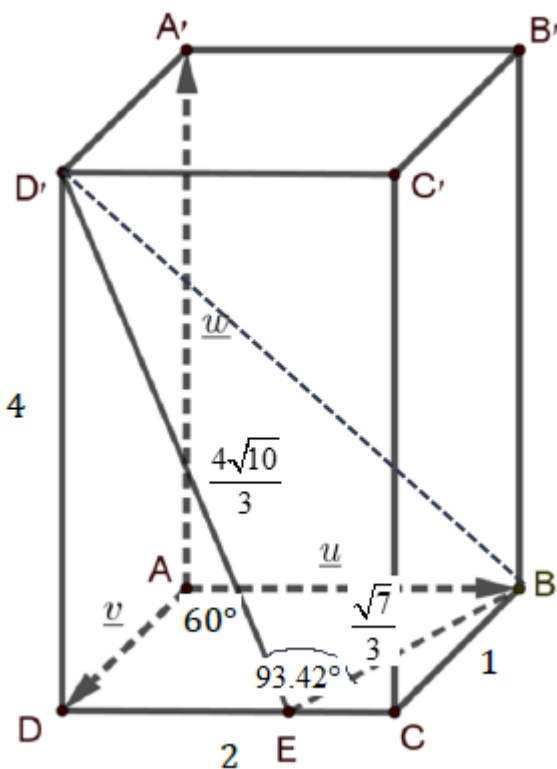
(2) נחשב את שטח המשולש $D'EB$.

$$S_{\Delta D'EB} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{EB}| \cdot |\overrightarrow{ED'}| \cdot \sin \angle D'EB$$

$$S_{\Delta D'EB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{4\sqrt{10}}{3} \cdot \sin 93.42^\circ$$

$$\boxed{S_{\Delta D'EB} = 1.86}$$

תשובה: $S_{\Delta D'EB} = 1.86$.



א. נתונות שלוש נקודות: $A(1, 0, 7)$, $B(3, 2, 1)$, $C(3, -2, -2)$.

נראה שהן לא נמצאות על ישר אחד.

כהכנה לסעיף ב, נחשב את $\overrightarrow{AB}$, ואת $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \underline{B} - \underline{A} = \underline{x} = (2, 2, -6)$$

$$\overrightarrow{AC} = \underline{C} - \underline{A} = \underline{x} = (2, -2, -9)$$

לא קיים t שעבורו $t(2, 2, -6) = (2, -2, 9)$, ומכאן שהכיוונים של שני הווקטורים שונים,

ולכן שלוש הנקודות לא נמצאות על ישר אחד.

כמובן, שהן גם לא על שני ישרים מקבילים, כי הכיוונים אינם זהים,

והן יוצרות את $\triangle ABC$, שאותו ניתן לראות בציור עבור סעיף ב, וכבסיס הפירמידה עבור סעיף ג.

תשובה: הראינו כי שלוש הנקודות לא נמצאות על ישר אחד.

ב. (1) נחשב את גודל הזווית BAC .

$$\cos \angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} \quad \text{תכנון:}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (2, 2, -6) \cdot (2, -2, -9)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + (-6) \cdot (-9)$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 54}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-6)^2}$$

$$\boxed{|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{44}}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-9)^2}$$

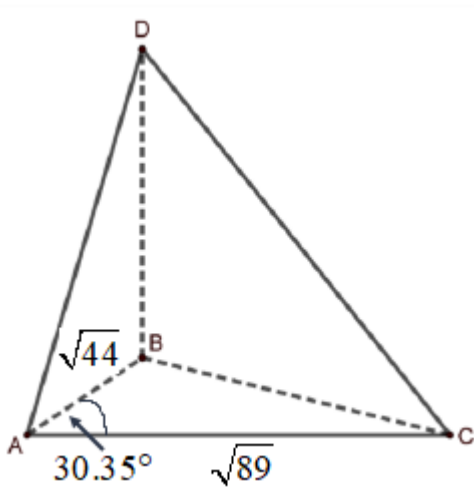
$$\boxed{|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{89}}$$

$$\cos \angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$$

$$\cos \angle BAC = \frac{54}{\sqrt{44} \cdot \sqrt{89}}$$

$$\boxed{\angle BAC = 30.35^\circ}$$

תשובה: $\angle BAC = 30.35^\circ$.



(2) נחשב את שטח המשולש ABC.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cdot \sin \angle BAC$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{44} \cdot \sqrt{89} \cdot \sin 30.35^\circ$$

$$S_{ABC} = 15.81$$

תשובה: שטח המשולש ABC הוא 15.81.

ג. נתונה נקודה $D(-12, 5, -3)$.

(1) נוכיח כי הווקטור $\overline{BD}$ מאונך למישור ABC.

נעשה זאת, על ידי כך שנראה שהוא מאונך לשני וקטורים במישור ABC, שאינם תלויים זה בזה.

$$\overline{BD} = \underline{D} - \underline{B} = \underline{x} = (-15, 3, -4)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{BD} = (2, 2, -6) \cdot (-15, 3, -4) = -30 + 6 + 24 = 0 \rightarrow \boxed{AB \perp BD}$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = (2, -2, -9) \cdot (-15, 3, -4) = -30 - 6 + 36 = 0 \rightarrow \boxed{AC \perp BD}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp BD \\ AC \perp BD \end{array} \right\} \boxed{BD \perp \pi_{ABC}}$$

תשובה: הוכחנו כי הווקטור $\overline{BD}$ מאונך למישור ABC.

(2) נחשב את נפח הפירמידה ABCD,

כאשר על פי תת-סעיף ג(1) BD הוא גובה הפירמידה לבסיס ABC.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot BD$$

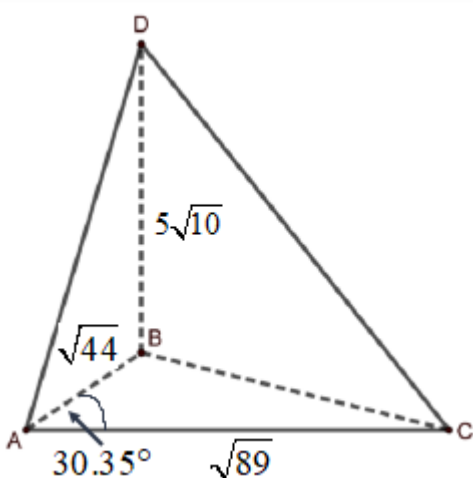
$$|\overline{BD}| = \sqrt{(-15)^2 + 3^2 + (-4)^2}$$

$$|\overline{BD}| = 5\sqrt{10}$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 15.81 \cdot 5\sqrt{10}$$

$$V_{ABCD} = 83.33$$

תשובה: נפח הפירמידה ABCD הוא 83.33.



נוסחת הגדילה והדעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$, כאשר M_0 - הכמות ההתחלתית

q הוא גורם הגדילה/דעיכה, M_t הכמות לאחר זמן t .

א. (1) יוסי קנה דירה במחיר 1.12 מיליון שקלים. לאחר 9 שנים מחיר הדירה הגיע ל- 1.51 מיליון שקלים. נמצא פי כמה עלה מחיר הדירה בכל שנה (גורם הגדילה).

$$1.51 = 1.12 \cdot q^9 \quad / : 1.12$$

$$1.3842 = q^9$$

$$\sqrt[9]{1.3842} = q$$

$$q = 1.0338$$

נמצא את אחוז הגדילה השנתי.

$$1.0338 = \frac{100 + P}{100} \quad / \cdot 100$$

$$103.38 = 100 + P$$

$$P = 3.38\%$$

תשובה: מחיר הדירה עלה ב- 3.38% מדי שנה, במשך 9 שנים לאחר קניית הדירה.

(2) במשך 4 שנים, לאחר מכן, ירד מחיר הדירה עקב משבר כלכלי, ב- 15%. כלומר, לאחר אותן 4 שנים, הגיע מחיר הדירה ל- 85% ממחירה בתחילת המשבר.

נמצא את אחוז הדעיכה השנתי.

$$0.85 \cdot 1.51 = 1.51 \cdot q^4 \quad / : 1.51$$

$$0.85 = q^4$$

$$\sqrt[4]{0.85} = q$$

$$q = 0.9602$$

$$0.9602 = \frac{100 - P}{100} \quad / \cdot 100$$

$$96.02 = 100 - P$$

$$P = 3.98\%$$

תשובה: מחיר הדירה ירד ב- 3.98% מדי שנה, מאז שהתחילה הירידה בערך הדירה.

ב. יוסי מכר את הדירה 15 שנים לאחר קניית הדירה.

מכאן שערך הדירה ירד במשך 6 שנים, מאז שמחירה הגיע ל- 1.51 מיליון שקלים.

נמצא את ערך הדירה, בזמן מכירתה.

$$M_6 = 1.51 \cdot 0.9602^6$$

$$M_6 = 1.18$$

מכאן שיוסי הרוויח, כי קנה את הדירה תמורת 1.12 מיליון שקלים, ומכר אותה תמורת 1.18 מיליון שקלים.

תשובה: יוסי הרוויח לעומת המחיר ששילם עבור הדירה.

ג. נמצא כעבור כמה שנים, מתחילת המשבר הכלכלי, יהיה מחיר הדירה 1.12 מיליון שקלים.

$$1.12 = 1.51 \cdot 0.9602^t \quad / : 1.51$$

$$0.7417 = 0.9602^t$$

$$\ln 0.7417 = \ln 0.9602^t$$

$$\ln 0.7417 = t \ln 0.9602$$

$$\frac{\ln 0.7417}{\ln 0.9602} = t$$

$$t \approx 7.36$$

ניתן גם

$$0.7417 = 0.9602^t$$

$$t = \log_{0.9602} 0.7417$$

$$t = \frac{\log 0.7417}{\log 0.9602} \approx 7.36$$

כלומר, לאחר $7.36 + 9 = 16.36$ שנים מתחילת המשבר הכלכלי.

תשובה: לאחר 16.36 שנים בערך, לאחר קניית הדירה על ידי יוסי,

ערכה יחזור למחיר המקורי בו הוא קנה אותה.

א. נתונה הפונקציה $g(x) = -e^x + 4$, המוגדרת לכל x .

נשים לב, שיש כאן טרנספורמציה על הפונקציה $f(x) = e^x$:

סיבוב סביב ציר ה- x , והזזה אנכית 4 יחידות כלפי מעלה.

לכן כיוון ש- $f(x) = e^x$ עולה תמיד, אז $g(x) = -e^x + 4$ יורדת תמיד,

ומכיוון של- $f(x) = e^x$ יש אסימפטוטה אופקית לשמאל $y = 0$,

אז ל- $g(x) = -e^x + 4$ תהייה אסימפטוטה אופקית לשמאל $y = 4$.

נעבוד גם בדרך הרגילה...

$$(1) \quad (0,3) \rightarrow g(0) = -e^0 + 4 = -1 + 4 = 3 \rightarrow x=0, \text{ ולכן } (0,3) \text{ נקודת חיתוך עם ציר ה- } y.$$

$$y=0 \rightarrow 0 = -e^x + 4 \rightarrow e^x = 4 \rightarrow x = \ln 4 \rightarrow (\ln 4, 0)$$

ולכן $(\ln 4, 0)$ היא נקודת החיתוך עם ציר ה- x .

תשובה: $(0,3)$, $(\ln 4, 0)$.

(2) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$g'(x) = -e^x$$

הנגזרת שלילית, ולכן אין תחומי עלייה.

תשובה: ירידה – כל x , עלייה – אף x .

(3) נמצא את האסימפטוטה האנכית לציר ה- y (אסימפטוטה אופקית), על ידי הצבה.

$$g(10) = -e^{10} + 4 = -22,022 \rightarrow -\infty$$

$$g(-10) = -e^{-10} + 4 = 3.99995 \rightarrow 4$$

תשובה: האסימפטוטה האנכית לציר ה- y היא $y = 4$ (כאשר $x \rightarrow -\infty$).

(4) $g(x) = -e^x + 4$ יורדת, לכן משמאל ל- $(\ln 4, 0)$ היא תהייה חיובית, ומימין שלילית.

תשובה: חיוביות - $x < \ln 4$, שליליות - $x > \ln 4$.

ב. נחשב את השיעורים של נקודת החיתוך של שתי הפונקציות $f(x) = e^x$ ו- $g(x) = -e^x + 4$.

$$e^x = -e^x + 4$$

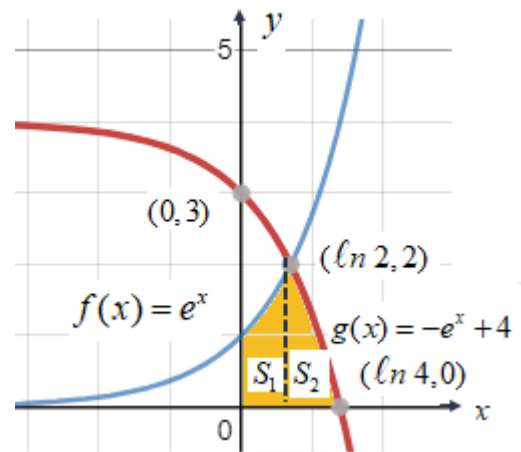
$$2e^x = 4$$

$$e^x = 2$$

$$x = \ln 2 \rightarrow (\ln 2, 2)$$

תשובה: $(\ln 2, 2)$.

ג. (1) נסרטט את הגרפים של שתי הפונקציות, כולל סימון השטח לתת-סעיף ג(2).



(2) נחשב את השטח המבוקש, על ידי חלוקתו לשני שטחים.

$$S_1 = \int_0^{\ln 2} e^x dx$$

$$S_1 = e^x \Big|_0^{\ln 2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \ln 2: e^{\ln 2} = 2 \\ x = 0: e^0 = 1 \end{array} \right\}$$

$$S_1 = 2 - 1$$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = \int_{\ln 2}^{\ln 4} (-e^x + 4) dx$$

$$S_2 = (-e^x + 4x) \Big|_{\ln 2}^{\ln 4}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \ln 4: -e^{\ln 4} + 4\ln 4 = -4 + 4\ln 4 \\ x = \ln 2: -e^{\ln 2} + 4\ln 2 = -2 + 4\ln 2 \end{array} \right\}$$

$$S_2 = -2 + 4(\ln 4 - \ln 2)$$

$$S_2 = -2 + 4\ln \frac{4}{2}$$

$$S_2 = -2 + 4\ln 2$$

(ברור שניתן גם לרשום מספרים עשרוניים, אולם בחרתי להראות חישובים לוגריתמיים.)

גודל השטח המבוקש: $S_1 + S_2 = 1 - 2 + 4\ln 2 = -1 + 4\ln 2 \approx 1.7726$.

תשובה: גודל השטח המבוקש הוא $-1 + 4\ln 2 \approx 1.7726$ יח"ר.

בגרות פא ינואר 21 דוגמה 1 שאלון 35472 במקור
בגרות עח יולי 18 מועד קיץ ב שאלון 35482

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\ln x^2}{x^2}$.

(1) בתחום ההגדרה, הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית גדול מאפס, לכן $x \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 0$.

בתחום ההגדרה, המכנה שונה מאפס, לכן $x \neq 0$.

תשובה: $x \neq 0$.

(2) כאשר $x \rightarrow 0$, למשל $f(\pm 0.01) = -92103 \rightarrow -\infty$, ו- $x = 0$ אסימפטוטה אנכית.

(כאשר $x \rightarrow \infty$, למשל $f(\pm 1000) = 1.3 \cdot 10^{-5} \rightarrow 0$, ו- $y = 0$ אסימפטוטה אופקית לימין ולשמאל.)

תשובה: $x = 0$.

(3) $x = 0$ לא בתחום ההגדרה, ולכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה- y .

בנקודת חיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y = 0$:

$$\ln x^2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$(1, 0), (-1, 0)$$

תשובה: $(1, 0)$, $(-1, 0)$.

(4) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגן.

$$f'(x) = \frac{\frac{2x \cdot x^2}{x^2} - 2x \ln x^2}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 2x \ln x^2}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{2x(1 - \ln x^2)}{x^4}$$

$$1 - \ln x^2 = 0 \quad x \neq 0$$

$$\ln x^2 = 1$$

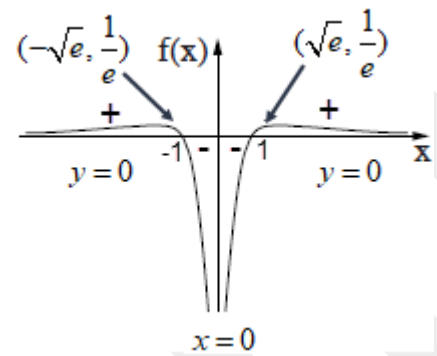
$$x = \pm \sqrt{e}$$

$$f(\pm \sqrt{e}) = \frac{\ln (\pm \sqrt{e})^2}{(\pm \sqrt{e})^2} = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} \rightarrow \left(\sqrt{e}, \frac{1}{e} \right) \quad \left(-\sqrt{e}, \frac{1}{e} \right)$$

על פי ערכי הפונקציה, שמצאנו בסעיף א, שתי נקודות אלו הן נקודות מקסימום.

תשובה: $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{e} \right)$ מקסימום, $\left(-\sqrt{e}, \frac{1}{e} \right)$ מקסימום.

(5) הסקיצה המתאימה של $f(x) = \frac{\ln x^2}{x^2}$, כולל סימון עבור תת-סעיף א(6).



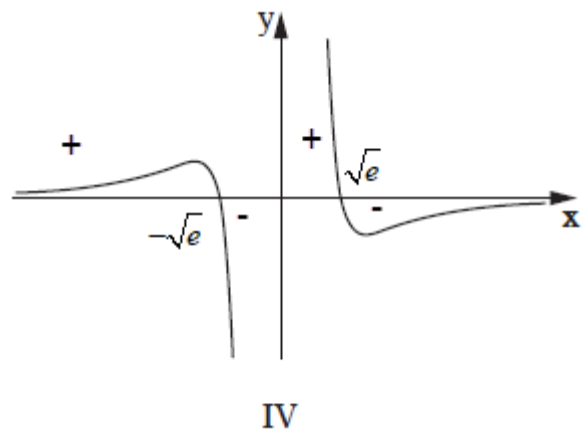
(6) תשובה: חיוביות $x > 1$ או $x < -1$. שליליות $0 < x < 1$ או $-1 < x < 0$ (אפשר גם $x \neq 0$). $-1 < x < -1$.

ב. רצוי לתת לפחות שלושה נימוקים לגרף המתאים.

- בנקודה שבה $x = \sqrt{e}$ עוברת הפונקציה מעלייה לירידה, וגרף הנגזרת מחיובי לשלילי.
- בנקודה שבה $x = -\sqrt{e}$ עוברת הפונקציה מעלייה לירידה, וגרף הנגזרת מחיובי לשלילי.
- $f(x) = \frac{\ln x^2}{x^2}$ פונקציה זוגית, סימטרית לציר ה- y .

$$f'(x) = \frac{2x(1 - \ln x^2)}{x^4}$$

פונקציה אי-זוגית, סימטרית לראשית הצירים.



תשובה: גרף IV הוא הגרף של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$.