

שאלון 35471 מועד ב' קיץ תש"פ

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי
התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:

שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35471 מועד ב'
קיץ תש"פ.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. הציון הממוצע בבחינה הוא, הוא $\bar{x} = 75$.

20% מהציונים נמוכים מהציון 60.

השטח החלקי משמאל לציון התקן, שמתחת לעקומה של ההתפלגות הנורמלית, מייצג את ההסתברות לקבלת ציון שמתחת לציון התקן המתאים.

$$p = 0.2 \rightarrow z = -0.84$$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$-0.84 = \frac{60 - 75}{s}$$

$$s = \frac{-15}{-0.84}$$

$$\boxed{s = 17.86}$$

תשובה: סטיית התקן של הציונים של בחינת המתכונת היא 17.86.

ב. לבחינת המתכונת ניגשו 300 תלמידים.

תלמידים עם ציון נמוך מ- 55 יקבלו שיעורי עזר.

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{55 - 75}{17.86} = -\frac{20}{17.86} = -1.12$$

ציון התקן הוא -1.12

השטח החלקי מימין לציון התקן, שמתחת לעקומה של ההתפלגות הנורמלית, מייצג את החלק היחסי (אחוז, או הסתברות) לקבלת ציון שמעל לציון התקן שמצאנו.

$$\text{היא: } p(x < 55) = p(z < -1.12) = 0.131$$

$$\text{מספר התלמידים הוא } 0.131 \cdot 300 \approx 39$$

תשובה: 39 תלמידים (בערך) יקבלו את שיעורי העזר.

ג. ל- 38 התלמידים המצטיינים הוצע לעזור לתלמידים מתקשים, במסגרת ההתנדבות בבית הספר.

$$p(\text{excellence}) = \frac{38}{300} \approx 0.127, \text{ ובהתאם } 1 - 0.127 = 0.873 \text{ מהתלמידים אינם מצטיינים.}$$

$$z(p < 0.873) = 1.14$$

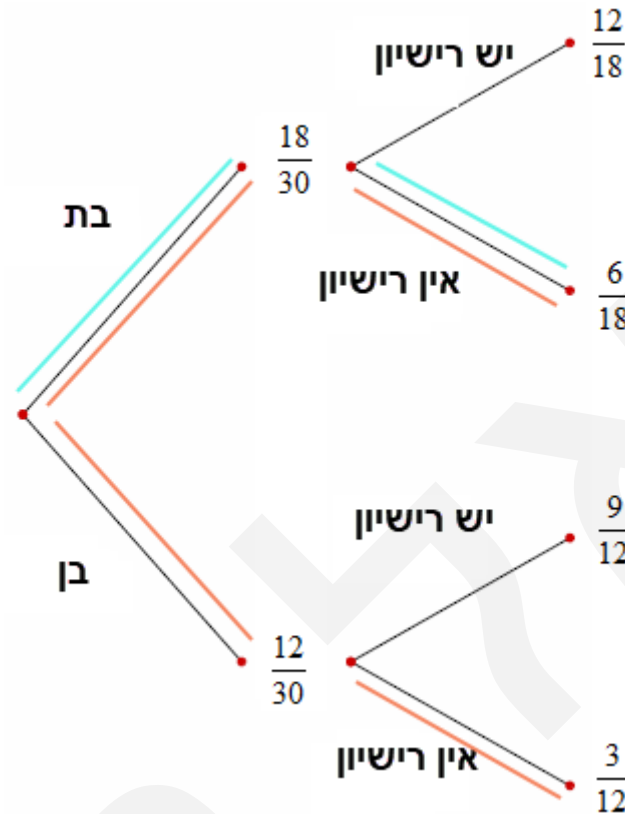
$$1.14 = \frac{x - 75}{17.86}$$

$$20.36 = x - 75$$

$$\boxed{95.36 = x}$$

תשובה: הציון המינימלי הנדרש להצטיינות הוא 95.36.

א. נבנה עץ אפשרויות מתאים.



(1) נחשב את ההסתברות שנבחר תלמיד ללא רישיון נהיגה.

$$P(\text{no license}) = \frac{18}{30} \cdot \frac{6}{18} + \frac{12}{30} \cdot \frac{3}{12} = 0.3$$

תשובה: ההסתברות היא 0.3 .

(2) נחשב את ההסתברות שנבחרה בת,

אם ידוע שהתלמיד/ה ללא רישיון נהיגה (המסלול הירוק, מתוך המסלולים האדומים).

$$P(a \text{ girl} / \text{hasn't a license}) = \frac{P(a \text{ girl} \cap \text{hasn't a license})}{P(\text{hasn't a license})} =$$

$$P(a \text{ girl} / \text{has a license}) = \frac{\frac{18}{30} \cdot \frac{6}{18}}{0.3} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{2}{3}$.

ב. נחשב את ההסתברות להוצאת שני בעלי רישיון נהיגה, לאחר החזרה של הנבחר הראשון.

$$P(\text{licence}) = 1 - 0.3 = 0.7$$

ולכן ההסתברות המבוקשת היא $0.7^2 = 0.49$.

תשובה: ההסתברות להוצאת שני בעלי רישיון נהיגה, עם החזרה, היא 0.49.

ג. נסמן x נוספר הבנים שנוספו, מתוך ה-5 שהצטרפו לכיתה.

ההסתברות לבחור בן לא השתנתה, לכן שיעור הבנים מתוך ה-5 שנוספו שווה לשיעורם מתוך ה-30 שהיו.

$$\frac{x}{5} = \frac{12}{30} \rightarrow x = 2$$

$$\text{אפשר גם: } \frac{12+x}{35} = \frac{12}{30} \rightarrow x = 2$$

לכן נוספו 2 בנים ויש בכיתה $12 + 2 = 14$ בנים לאחר השינוי,

ונוספו 3 בנות ויש בכיתה $18 + 3 = 21$ בנות, לאחר השינוי.

תשובה: לאחר השינוי יש בכיתה 14 בנים ו-21 בנות.

א. הסדרה a_n מקיימת את הכלל $a_n = 2n + 3$ לכל n טבעי.

נראה שהסדרה היא חשבונית ונמצא את הפרשה.

$$a_{n+1} - a_1 = 2(n+1) + 3 - (2n + 3)$$

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 2 + 3 - 2n - 3$$

$$\boxed{a_{n+1} - a_n = 2} \rightarrow \boxed{d = 2}$$

הראינו שההפרש בין כל שני איברים סמוכים בסדרה קבוע (לא תלוי ב- n), ולכן הסדרה היא חשבונית,

כאשר $d = 2$ ו- $\boxed{a_1 = 5} \rightarrow a_1 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$.

תשובה: הוכחנו שהסדרה היא חשבונית, והפרש הסדרה הוא 2.

ב. באולם הקולנוע, מסודרים הכיסאות לפי הכלל $a_n = 2n + 3$,

כלומר זו סדרה חשבונית $d = 2$ ו- $a_1 = 5$.

נמצא באיזו שורה יש 19 כיסאות.

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$19 = 5 + 2(n-1)$$

$$14 = 2(n-1) \quad / : 2$$

$$7 = n - 1$$

$$\boxed{8 = n} \rightarrow \boxed{a_8 = 19}$$

תשובה: בשורה ה- 8 יש 19 כיסאות.

ג. נמצא את מספר השורות באולם, כאשר בסידור החדש (עקב הקורונה) $d = 1$ ו- $a_1 = 3$.

מספר הצופים הכולל שאפשר להושיב באולם,

קטן ב- 90 ממספר הצופים בתפוסה מלאה לפני מגבלות הקורונה.

$$S_n^* + 90 = S_n$$

$$\frac{n \cdot [2 \cdot 3 + 1(n-1)]}{2} + 90 = \frac{n \cdot [2 \cdot 5 + 2(n-1)]}{2} \quad / : 2$$

$$n \cdot (6 + n - 1) + 180 = n \cdot (10 + 2n - 2)$$

$$n \cdot (5 + n) + 180 = n \cdot (8 + 2n)$$

$$5n + n^2 + 180 = 8n + 2n^2$$

$$0 = n^2 + 3n - 180$$

$$\boxed{n = 12} \leftarrow n \text{ is natural} \rightarrow \cancel{n = -15}$$

תשובה: מספר השורות באולם הוא 12.

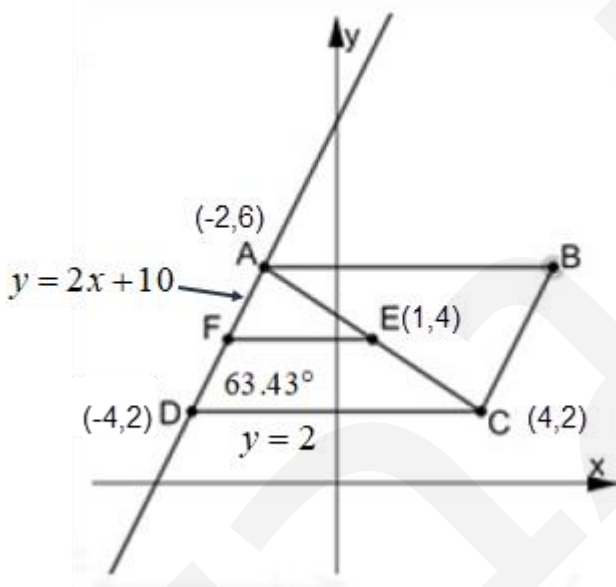
א. (1) אלכסוני המקבילית ABCD חוצים זה את זה בנקודה E, והנקודה F היא אמצע הצלע AD. מכאן ש- FE קטע אמצעים ב- $\triangle ADC$.

$$\text{לכן } FE \parallel DC \text{ (ושווה למחציתה), } \left(\frac{FE}{DC} = \frac{1}{2}\right).$$

תשובה: הוכחנו ש- $FE \parallel DC$.

$$(2) \text{ כיוון ש- } FE \parallel DC, \text{ אז מתקיים על פי משפט תאלס הרחבה 1: } \frac{FE}{DC} = \frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AC}.$$

מכאן, ש- $\triangle AEF \sim \triangle ACD$ על פי משפט דמיון צלע צלע, ויחס השטחים הוא 1:4, כי יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון. תשובה: הוכחנו ש- $\triangle AEF \sim \triangle ACD$, ויחס הדמיון הוא 1:4.



ב. (1) $y_D = y_C = 2$ ולכן משוואת הישר DC היא $y = 2$.

הנקודה E היא אמצע האלכסון AC:

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{y_A + 2}{2} & 1 &= \frac{x_A + 4}{2} \\ 8 &= y_A + 2 & 2 &= x_A + 4 \\ 6 &= y_A & -2 &= x_A \end{aligned}$$

ולכן, שיעורי הקודקוד A הם $(-2, 6)$.

$$m_{AD} = \frac{y_A - y_D}{x_A - x_D} = \frac{6 - 2}{-2 - (-4)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y - 6 = 2(x + 2) \leftarrow A(-2, 6), m_{AD} = 2$$

$$y - 6 = 2x + 4$$

$$\boxed{y = 2x + 10}$$

ומשוואת הישר AD היא $y = 2x + 10$.

תשובה: משוואת הישר DC היא $y = 2$, ומשוואת הישר AD היא $y = 2x + 10$.

(2) כיוון שהצלע DC מקבילה לציר ה- x אז $m_{AD} = \tan \alpha$.

$$\tan \angle ADC = 2$$

$$\boxed{\angle ADC = 63.43^\circ}$$

תשובה: $\angle ADC = 63.43^\circ$.

ג. (1) $S_{\triangle ACD} = \frac{DC \cdot h_{DC}}{2}$ (עדיף על פני $S_{\triangle ADC} = \frac{AD \cdot DC \cdot \sin \angle ADC}{2}$).

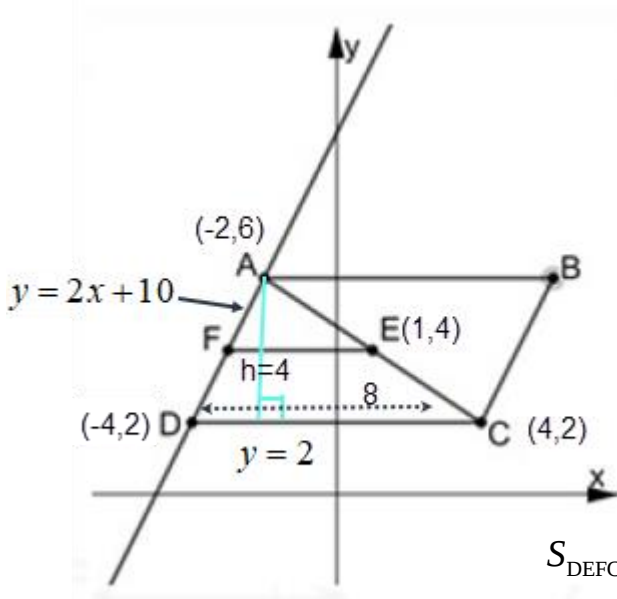
$$DC = x_C - x_D = 4 - (-4) = 8$$

$$h_{DC} = y_A - 2 = 6 - 2 = 4$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16 \rightarrow \boxed{S_{\triangle ACD} = 16}$$

$$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{4} \cdot S_{\triangle ACD} = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4 \rightarrow \boxed{S_{\triangle AEF} = 4}$$

תשובה: $S_{\triangle AEF} = 4$, $S_{\triangle ACD} = 16$.



$$S_{DEFC} = \frac{3}{4} \cdot S_{\triangle ACD} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} \rightarrow \boxed{S_{DEFC} = \frac{3}{8} \cdot S_{ABCD}} \quad (2)$$

תשובה: שטח המקבילית ABCD גדול פי $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ משטח הטרפז DEFC.

א. $\angle BAD = \angle BCD$ (נתון), וגם $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ (סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל).
 לכן $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ ו- BD הוא קוטר במעגל (נשען על זווית היקפית ישרה).
 תשובה: הוכחנו ש- BD הוא קוטר במעגל.

ב. (1) $y_D = y_A = -2$, ולכן AD מקביל לציר ה- x.

ולכן AB מקביל לציר ה- y, $AD \perp AB$.

תשובה: הוכחנו ש- AB מקביל לציר ה- y.

(2) $BC \perp CD$, ולכן על פי תנאי ניצבות $m_{BC} \cdot m_{CD} = -1$.

$$m_{CD} = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{2 - (-2)}{0 - 2} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$m_{CD} = -2 \rightarrow m_{BC} = +\frac{1}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + 2} \leftarrow C(0, 2), m_{BC} = \frac{1}{2}$$

תשובה: משוואת הישר BC היא $y = \frac{1}{2}x + 2$.

(3) $x_B = x_A = 4$ (AB מקביל לציר ה- y).

$$y_B = \frac{1}{2} \cdot 4 + 2 = 4 \rightarrow \boxed{B(4, 4)}$$

תשובה: B(4, 4).

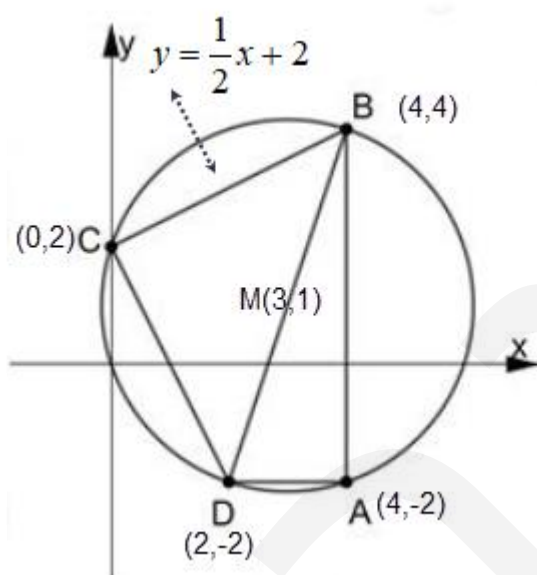
(4) מרכז המעגל (M) הוא אמצע הקוטר BD.

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{4+2}{2} = 3 \\ y &= \frac{4+(-2)}{2} = 1 \end{aligned} \right\} \boxed{M(3, 1)}$$

$$R = BM = \sqrt{(4-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$$

לסיכום: מרכז המעגל M(3, 1), ורדיוס המעגל הוא $\sqrt{10}$.

תשובה: משוואת המעגל היא: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$.



ג. $\angle ACB = \angle ADB$ (נשענות על קשת משותפת AB).

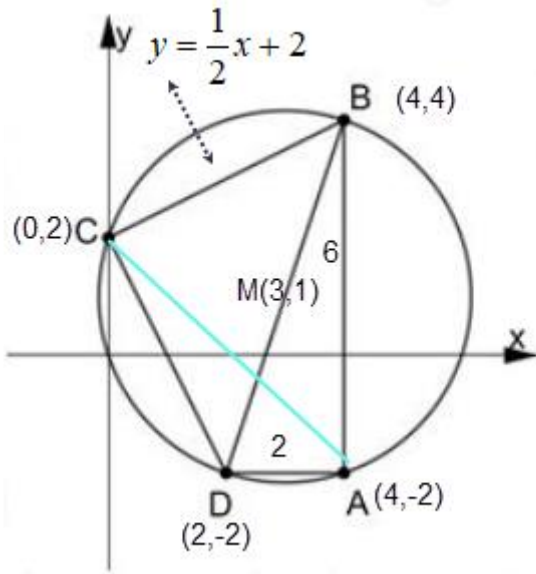
ΔADB

$$\tan \angle ADB = \frac{AB}{AD}$$

$$\tan \angle ADB = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_D}$$

$$\tan \sphericalangle ADB = \frac{4 - (-2)}{4 - 2} = 3$$

$$\angle ADB = 71.56^\circ \rightarrow \angle ACB = 71.56^\circ$$



פתרון אחר, על פי משפט הסינוסים ΔACB

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R$$

$$\frac{6}{2\sqrt{10}} = \sin \angle ACB$$

$$\boxed{\angle ACB = 71.56^\circ} \quad \leftarrow \angle ACB < 90^\circ$$

תשובה: גודל זווית ACB הוא 71.56° .

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$.

(1) בתחום ההגדרה, ביטוי בתוך השורש במכנה הוא חיובי.

$$1-x^2 > 0$$

$$\boxed{-1 < x < 1}$$

כי הביטוי הוא של פרבולה הפוכה ("בוכה") שחיובית בתחום הזה.

תשובה: $-1 < x < 1$

(2) $x=1$ או $x=-1$ מאפסים מכנה ולא מונה, ולכן הישרים $x=1$ או $x=-1$ אסימפטוטות אנכיות.

אין אסימפטוטה אופקית, כי תחום ההגדרה הוא $-1 < x < 1$.

תשובה: $x=1$ או $x=-1$ אסימפטוטות אנכיות.

(3) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y מתקיים $x=0$ ונקבל את הנקודה $(0,3)$.

אין נקודת החיתוך עם ציר ה- x כי המונה חיובי לכל x (ולמעשה כל הפונקציה חיובית).

תשובה: $(0,3)$.

(4) $f(-x) = \frac{3}{\sqrt{1-(-x)^2}} = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} = f(x)$, ולכן הפונקציה היא זוגית (וסימטרית לציר ה- y).

תשובה: הראינו שהפונקציה היא זוגית.

(5) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגן.

$$f'(x) = \frac{0 - \frac{3(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

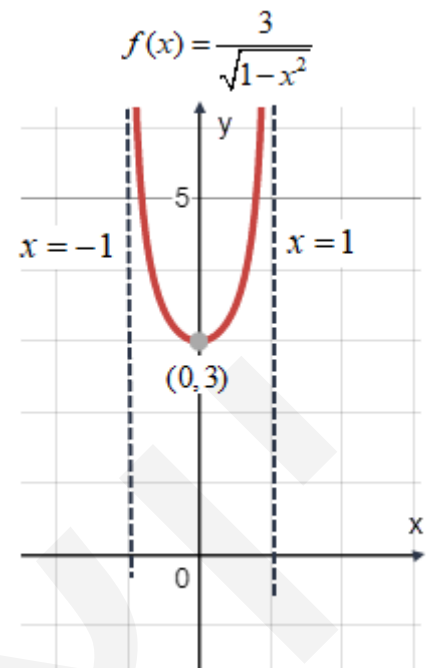
$$\boxed{f'(x) = \frac{3x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}}$$

$$0 = 3x \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 3)$$

$$f'(-0.5) < 0, f'(0.5) > 0 \rightarrow \boxed{(0, 3), \min}$$

תשובה: $(0,3)$ מינימום.

ב. סרטוט גרף הפונקציה.



ג. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) - k$,

שהיא הזזה אנכית ב- $-k$ יחידות של $f(x)$.

הישר $y = 3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת המינימום שלה $(0, 3)$.

הישר $y = -4$ ישיק לגרף הפונקציה $g(x)$ אם נוריד את $f(x)$ ב- 7 יחידות כלפי מטה,

ואז ישיק ל- $g(x)$ בנקודת המינימום שלה $(0, -4)$.

תשובה: עבור $k = 7$, הישר $y = -4$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)$.

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{a}{x^3} + 2$ (פרמטר a).

$f'(2) = -\frac{3}{2}$, כי שיפוע המשיק בנקודה שבה $x = 2$ הוא $-\frac{3}{2}$.

$$f'(x) = \frac{0 - a \cdot 3x^2}{x^6}$$

$$-\frac{3}{2} = \frac{-a \cdot 3 \cdot 2^2}{2^6} \leftarrow f'(2) = -\frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2} = \frac{-12a}{64} \quad / \cdot 64$$

$$-96 = -12a \quad / : (-12)$$

$$\boxed{a = 8}$$

תשובה: $a = 8$.

ב. $f(x) = \frac{8}{x^3} + 2$

(1) בתחום ההגדרה, מכנה שונה מ-0, לכן $x \neq 0$.

$x = 0$ מאפס מכנה ולא מונה, ולכן הישר $x = 0$ אסימפטוטה אנכית.

חזקת המונה של המחובר השמאלי (0) קטנה מחזקת המכנה (2), ולכן מחובר זה שואף ל-0,

כאשר $x \rightarrow \pm\infty$, ומכאן ש- $f(x) \rightarrow 0 + 2 = 2$ ו- $y = 2$ אסימפטוטה אופקית.

תשובה: תחום ההגדרה $x \neq 0$, $x = 0$ אסימפטוטה אנכית, $y = 2$ אסימפטוטה אופקית.

(2) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

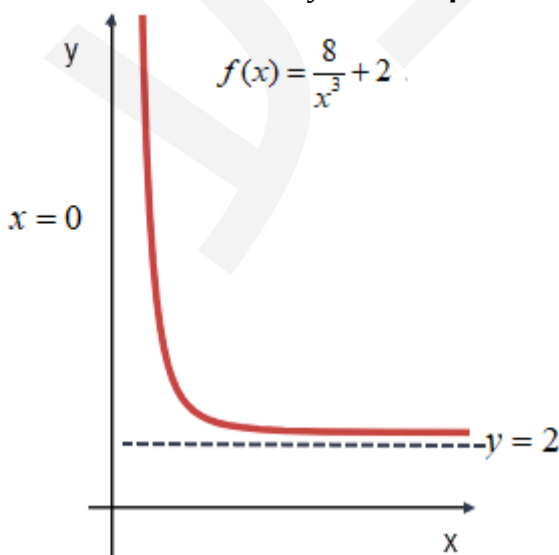
$$f'(x) = \frac{0 - 8 \cdot 3x^2}{x^6}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-24}{x^4}}$$

הנגזרת שלילית לכל $x \neq 0$, ולכן הפונקציה יורדת משמאל ומימין לציר ה- y .

תשובה: ירידה - $x > 0$ או $x < 0$, עלייה - אף x .

(3) סרטוט גרף הפונקציה, בתחום $x > 0$.



ג. $f'(x) = \frac{-24}{x^4}$

גרף I הוא הגרף של פונקציית הנגזרת, בתחום $x > 0$, מהנימוקים הבאים:

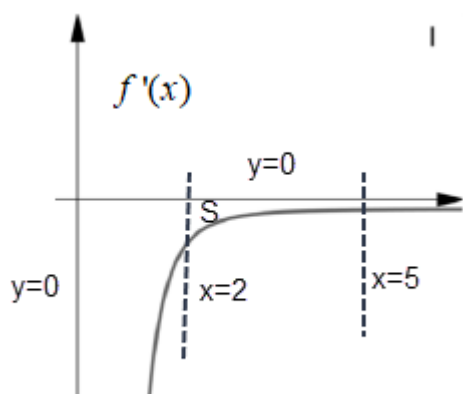
• $f(x)$ יורדת בתחום זה, ו- $f'(x)$ שלילית.

• $x = 0$ אסימפטוטה אנכית.

• $y = 0$ אסימפטוטה אופקית.

תשובה: גרף I הוא הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, בתחום $x > 0$.

ד. נחשב את השטח המוגבל.



$$S = \int_2^5 (0 - f'(x)) dx$$

$$S = -f(x) \Big|_2^5$$

$$x = 5: -f(5) = -\left(\frac{8}{5^3} + 2\right) = -2.064$$

$$x = 2: -f(2) = -\left(\frac{8}{2^3} + 2\right) = -3$$

$$S = 0.936$$

תשובה: השטח המוגבל הוא 0.936.

א. נתונות הפונקציות $f(x) = (x-3)^2$, ו- $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

(1) תחום ההגדרה של $f(x) = (x-3)^2$ הוא כל x .

תחום ההגדרה של $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ הוא $x \neq 3$, כי $x=3$ מאפס את $f(x)$.

תשובה: $f(x)$ - כל x , $g(x)$ - $x \neq 3$.

(2) $f(x) = (x-3)^2$ היא פרבולה ישרה ("צוחקת") עם קודקוד $(3, 0)$.

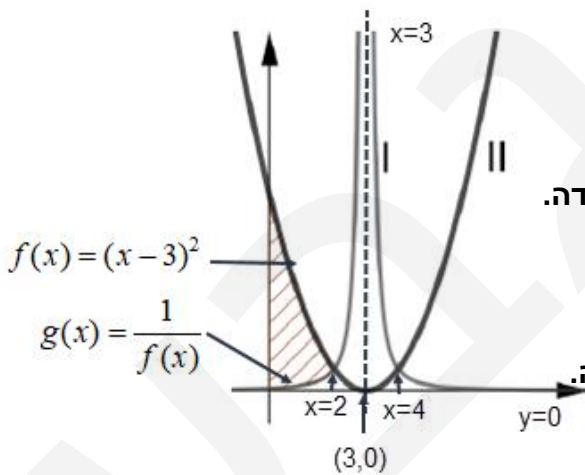
לכן עולה בתחום $x > 3$ ויורדת בתחום $x < 3$.

$g(x) = \frac{1}{f(x)}$. לכן, כאשר המכנה גדל, הפונקציה יורדת, וכאשר המכנה קטן הפונקציה עולה.

מכאן ש- $g(x)$ יורדת בתחום $x > 3$ ועולה בתחום $x < 3$.

אפשר גם $g'(x) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$ ומכאן להסיק שתחומי עלייה וירידה מתהפכים.

תשובה: $f(x)$ - עלייה $x > 3$ ירידה $x < 3$, $g(x)$ - עלייה $x < 3$, ירידה $x > 3$.



ב. (1) $f(x) = (x-3)^2$ גרף II ,

לפי קודקוד המינימום, הרציפות, ותחומי העלייה והירידה.

$g(x) = \frac{1}{f(x)}$ גרף I , לפי תחום ההגדרה,

אסימפטוטות $x=3$ ו- $y=0$, ותחומי העלייה והירידה.

(2) ל- $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ יש שתי אסימפטוטות המאונכות לצירים.

הישר $x=3$, כי $x=3$ מאפס מכנה ולא מונה.

הישר $y=0$, כי כאשר $x \rightarrow \pm\infty$ אז $f(x) \rightarrow \infty$ ולכן $g(x) = \frac{1}{f(x)} \rightarrow 0$.

תשובה: ל- $g(x)$ - $x=3$, $y=0$.

(3) נמצא את נקודות החיתוך בין הפונקציות:

$$g(x) = f(x)$$

$$\frac{1}{f(x)} = f(x)$$

$$1 = f^2(x)$$

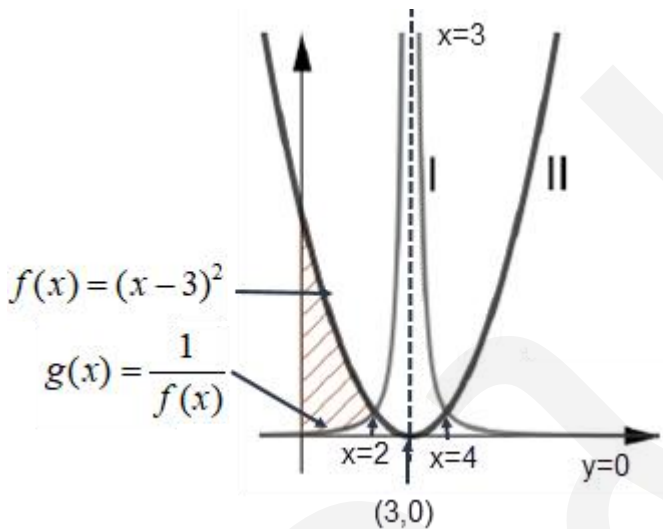
$$(x-3)^4 = 1$$

$$x-3=1 \rightarrow x=4$$

$$x-3=-1 \rightarrow \boxed{x=2}$$

תשובה: הראינו כי הגרפים של הפונקציות נפגשים בנקודה שבה $x=2$.

ג. נחשב את השטח המקווקו, כאשר הפעם נרשום את $g(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$.



$$S = \int_0^2 \left[(x-3)^2 - \frac{1}{(x-3)^2} \right] dx$$

$$\int_0^2 \left[(x-3)^2 - (x-3)^{-2} \right] dx$$

$$S = \left. \frac{(x-3)^3}{3} - \frac{(x-3)^{-1}}{-1} \right|_0^2$$

$$S = \left. \frac{(x-3)^3}{3} + \frac{1}{x-3} \right|_0^2$$

$$\left. \begin{array}{l} x=2: -\frac{4}{3} \\ x=0: -\frac{28}{3} \end{array} \right\} \boxed{S=8}$$

תשובה: גודל השטח המקווקו הוא 8.