

שאלון 35471 מועד מיוחד תשפ"א

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי
התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:

שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35471 מועד
מיוחד תשפ"א.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. נבנה עץ אפשרויות מתאים.



נחשב את ההסתברות להוציא סוכריית מנטה.

$$P(a \text{ mint candy}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{12}$$

תשובה: ההסתברות, להוציא סוכריית מנטה, היא $\frac{5}{12}$.

ב. נחשב את ההסתברות שהסוכריה הוצאה משקית א', אם ידוע שהוצאה סוכריית מנטה.

(המסלול הירוק, מתוך המסלולים האדומים.)

$$P(\text{bag a} / a \text{ mint candy}) = \frac{P(\text{bag a} \cap a \text{ mint candy})}{P(a \text{ mint candy})}$$

$$P(\text{bag a} / a \text{ mint candy}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$$

תשובה: ההסתברות שהסוכריה הוצאה משקית א', אם ידוע שהוצאה סוכריית מנטה, היא $\frac{2}{5}$.

ג. כיוון שמוציאים שתי סוכריות משקית א', ללא החזרה, הרי שההסתברויות משתנות.

האפשרות היחידה, שלפיה לא יישארו בשקית א' סוכריות מנטה, היא אם נוציא את שתיהן אחת אחרי השנייה.

$$P(\text{no mint candy}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

תשובה: ההסתברות, שאחרי הוצאת שתי הסוכריות משקית א' לא יישארו בה סוכריות מנטה, היא $\frac{1}{15}$.

א. אורך החיים הממוצע של מקרר הוא 10 שנים $\bar{x}$, וסטיית התקן היא 3 שנים s .
נמצא את ההסתברות שאורך החיים של מקרר יהיה בין 11 שנים ל- 14 שנים.
השטח החלקי משמאל לציון התקן, שמתחת לעקומה של ההתפלגות הנורמלית,
מייצג את ההסתברות לקבלת ציון שמתחת לציון התקן המתאים.

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z(14) = \frac{14 - 10}{3}$$

$$z(11) = \frac{11 - 10}{3}$$

$$z(14) = 1\frac{2}{3} \approx 1.333$$

$$z(11) = \frac{1}{3} \approx 0.333$$

$$p(x < 14) = 0.908$$

$$p(x < 11) = 0.629$$

וההסתברות המבוקשת היא: $p(11 < x < 14) = 0.908 - 0.629 = 0.279$.

תשובה: ההסתברות, שאורך החיים של מקרר יהיה בין 11 שנים ל- 14 שנים, היא 0.279.

ב. נמצא את אורך החיים של מקרר, שרק 10% מהמקרים גבוה ממנו,

כלומר, $90\% = 0.9$ מהמקרים, עם אורך חיים נמוך ממנו.

$$p = 0.9 \rightarrow z = 1.28$$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$1.28 = \frac{x - 10}{3}$$

$$3.84 = x - 10$$

$$13.84 = x$$

תשובה: אורך החיים של מקרר, שרק 10% מהמקרים גבוה ממנו, הוא 13.84 שנים.

ג. היצרן נותן אחריות להחלפת המקרר, אם הוא מתקלקל במהלך השנה הראשונה שלאחר הרכישה.

(1) עבור אורך חיים של שנה אחת, $x = 1$.

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z = \frac{1 - 10}{3}$$

$$z = -3$$

כלומר, 3 סטיות תקן מתחת לממוצע (מאוד מאוד מאוד נמוך...).

$$p(z < -3) = 0.0013 = 0.13\%$$

תשובה: 0.13% מהמקרים הם עם אורך חיים של עד שנה.

(2) בשנה מסוימת היצרן מכר 50,000 מקרים.

$$65 \text{ מקרים} = 0.0013 \cdot 50,000$$

היצרן צפוי להחליף 65 מקרים, במסגרת האחריות.

תשובה: גובהם של כ- 317 מתגייסים הוא מעל ל- 180 ס"מ.

ד. נבדוק את שתי הטענות הבאות.

(1) "אורך החיים החציוני של מקרר הוא 11 שנים."

התפלגות נורמלית היא סימטרית סביב הממוצע,

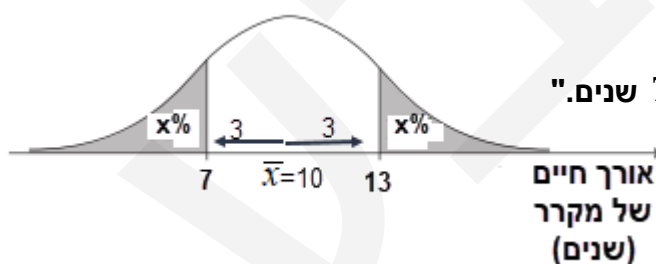
כלומר 50% מהנתונים מעל לממוצע, או מתחתיו, ולכן זהו החציון (וגם השכיח).

בשאלה שלנו, הממוצע והחציון הם אורך חיי מקרר של 10 שנים.

תשובה: הטענה אינה נכונה.

(2) "אחוז המקרים שאורך החיים שלהם מעל 13 שנים,

שווה לאחוז המקרים שאורך החיים שלהם מתחת ל- 7 שנים."



התפלגות נורמלית היא סימטרית סביב הממוצע.

בשאלה שלנו, הממוצע הוא אורך חיי מקרר של 10 שנים,

ושני הנתונים נמצאים באותו מרחק ממנו (של 3 שנים),

ולכן השטח שמימין ל- 13 שנים שווה לשטח שמשמאל ל- 7 שנים.

תשובה: הטענה נכונה.

א. נתונה סדרה המקיימת את הכלל $a_{n+1} = 3a_n - 2$, $a_1 = 2$, לכל n טבעי.

$$(n=1) \quad a_2 = 3a_1 - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4 \rightarrow \boxed{a_2 = 4}$$

$$(n=2) \quad a_3 = 3a_2 - 2 = 3 \cdot 4 - 2 = 10 \rightarrow \boxed{a_3 = 10}$$

תשובה: $a_3 = 10, a_2 = 4$.

ב. נתונים המספרים: a_1 , a_2 , $a_3 + x$.

בהתאם לתוצאות מסעיף א, המספרים הם: $2, 4, 10 + x$.

בסדרה הנדסית, המנה בין כל שני איברים עוקבים היא קבועה, ולכן $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2$.

כיוון, שהסדרה עולה – הרי שזה באמת סדר האיברים, ושלושת האיברים הראשונים הם: $2, 4, 8$.

לכן: $10 + x = 8$, ו- $x = -2$.

תשובה: עבור $x = -2$, שלושת המספרים הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה.

ג. בסדרה ההנדסית יש 25 איברים, נחשב את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

נזכור שבסדרה $2, 4, 8, \dots$, שמצאנו בסעיף ב, $b_1 = 2, q = 2$.

האיברים במקומות האי-זוגיים	
$b_1 = 2$	A_1
$\frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{b_n \cdot q^2}{b_n} = q^2 = 2^2 = 4$	Q
13	N

$$S_{13\text{odd}} = \frac{2 \cdot (4^{13} - 1)}{4 - 1}$$

$$\boxed{S_{13\text{odd}} = 44,739,242}$$

תשובה: סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 44,739,242.

א. נתון: ABCD מקבילית, שבה הצלע AD נמצאת על ציר ה- x , לכן $y_A = y_E = y_D = 0$.

$$AB = AE \quad (\text{נתון})$$

$$\angle ABE = \angle AEB \quad (\text{זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים})$$

$$BC \parallel AD \quad (\text{צלעות נגדיות מקבילות במקבילית})$$

$$\angle CBE = \angle AEB \quad (\text{זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים})$$

$$\angle ABE = \angle CBE \quad (\text{כלל המעבר})$$

תשובה: הוכחנו ש- BE חוצה את $\angle ABC$.

ב. נתון: $\angle BEC = 90^\circ$, $B(0, 4)$, $A(-3, 0)$.

(1) נחשב את שיעורי הנקודה E.

$$AB = \sqrt{(0+3)^2 + (4-0)^2} \rightarrow AB = 5 \rightarrow AE = 5$$

$$AE = x_E - x_A \rightarrow x_E = x_A + 5 = -3 + 5 = 2 \rightarrow E(2, 0)$$

תשובה: $E(2, 0)$.

(2) נמצא את משוואת הישר EC.

$$m_{BE} = \frac{4-0}{0-2} = -2$$

$$m_{EC} = +\frac{1}{2} \quad (\text{שיפוע הופכי לנגדי, כאשר הישרים מאונכים}).$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x - 1}$$

תשובה: משוואת הישר EC היא $y = \frac{1}{2}x - 1$.

(3) $BC \parallel AD$, לכן משוואת הצלע BC היא של פונקציה קבועה, $y = 4$, ו- $y_C = y_B = 4$.

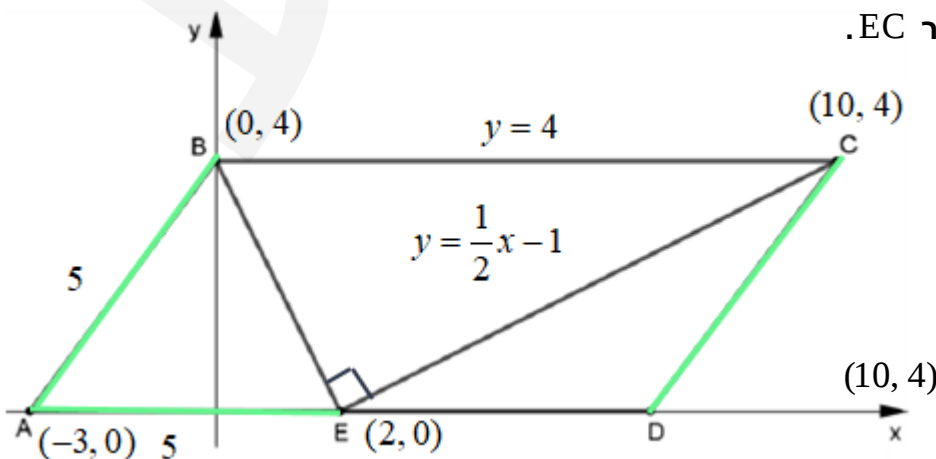
נציב $y_C = 4$ במשוואת הישר EC.

$$4 = \frac{1}{2}x - 1$$

$$5 = \frac{1}{2}x$$

$$x = 10 \rightarrow \boxed{C(10, 4)}$$

תשובה: $C(10, 4)$.



ג. (1) נחשב את $\angle BCE$.

הזווית שבין הישר CE לכיוון החיובי של ציר ה- x, $\angle CED$, α ,

נתונה ע"י הנוסחה: $m = \tan \alpha$.

$$m_{EC} = \frac{1}{2} \rightarrow \tan \angle CED = \frac{1}{2} \rightarrow \angle CED = 26.565^\circ$$

(זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים) $\angle BCE = \angle CED = 26.565^\circ$

תשובה: $\angle BCE = 26.565^\circ$.

(2) נחשב את זוויות הטרפז BCEA.

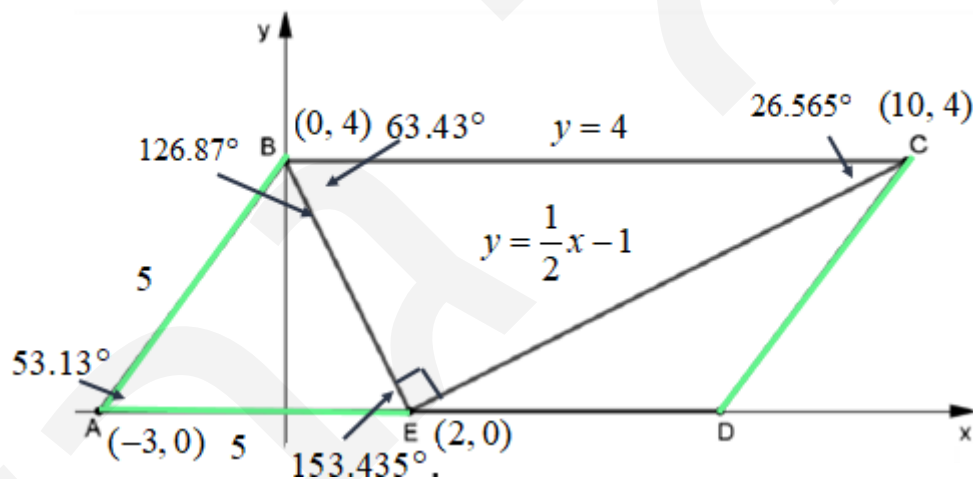
$\angle CEA = 153.435^\circ$ (זוויות חד צדדיות, בין ישרים מקבילים, משלימות ל- 180°)

$\angle CBE = 63.43^\circ$ (סכום זוויות 180° ב- $\triangle BEC$)

$\angle CBA = 126.87^\circ$ (BE חוצה את $\angle ABC$)

$\angle A = 53.13^\circ$ (זוויות חד צדדיות, בין ישרים מקבילים, משלימות ל- 180°)

תשובה: זוויות הטרפז BCEA הן: $\angle A = 53.13^\circ$, $\angle B = 126.87^\circ$, $\angle E = 153.435^\circ$, $\angle C = 26.565^\circ$.



א. נוכיח כי המשולשים ABE ו- DCE דומים.

$\angle A = \angle D$ (על קשת משותפת, BC, נשענות זוויות היקפיות שוות)

$\angle B = \angle C$ (על קשת משותפת, AD, נשענות זוויות היקפיות שוות)

$\triangle ABE \sim \triangle DCE$ (משפט דמיון זווית זווית)

תשובה: הוכחנו שהמשולשים ABE ו- DCE דומים.

ב. נתון המעגל $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$, שמרכזו $(3, -2)$ ורדיוסו 5.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y מתקיים $x=0$.

$$(0-3)^2 + (y+2)^2 = 25$$

$$(y+2)^2 = 16$$

$$y+2=4 \rightarrow y=2 \rightarrow \boxed{B(0, 2)}$$

$$y+2=-4 \rightarrow y=-6 \rightarrow \boxed{A(0, -6)}$$

תשובה: $B(0, 2)$, $A(0, -6)$.

ג. AD מיתר. $\angle CAD = 30^\circ$.

(1) נחשב את אורך המיתר CD.

$\triangle ACD$ על פי משפט הסינוסים

$$\frac{CD}{\sin \angle CAD} = 2R$$

$$CD = 2 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ$$

$$\boxed{CD = 5}$$

תשובה: אורך המיתר CD הוא 5.

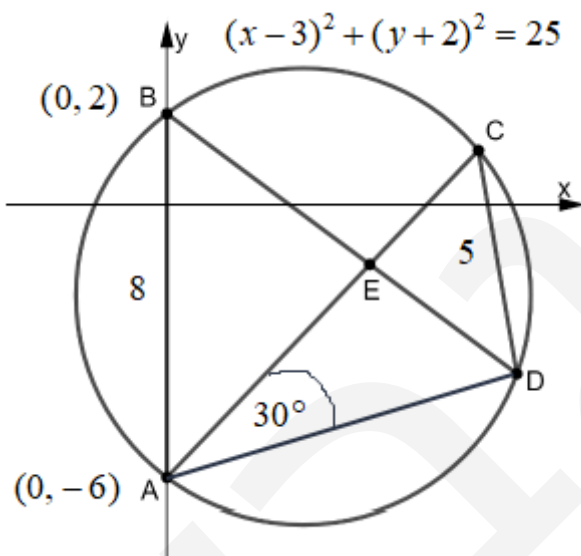
ד. נחשב את היחס בין שטחי המשולשים הדומים, המשולשים ABE ו- DCE.

$$AB = y_B - y_A = 2 - (-6) \rightarrow AB = 8$$

$$\frac{AB}{DC} = \frac{8}{5} \text{ וזה יחס הדמיון.}$$

$$(\text{יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון.}) \quad \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle DCE}} = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25}$$

$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle DCE}} = \frac{64}{25} \text{ תשובה:}$$



א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{-x^2 + 4x - 3}$.

(1) בתחום ההגדרה, המכנה שונה מאפס: $-x^2 + 4x - 3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3, x \neq 1$

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא: $x \neq 3, x \neq 1$.

(2) נמצא אסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

אסימפטוטות מקבילה לציר ה- y : הישרים $x = 1$ ו- $x = 3$ (מספרים אלו מאפסים מכנה ולא מונה).

אסימפטוטה מקבילה לציר ה- x : $y = -1$ (חזקת מונה (2) שווה לחזקת מכנה (2), $y \rightarrow \frac{-x^2}{x^2} = -1$).

תשובה: $x = 1$, $x = 3$, $y = -1$.

ב. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

$$f'(x) = \frac{2x(-x^2 + 4x - 3) - x^2(-2x + 4)}{(-x^2 + 4x - 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x[2(-x^2 + 4x - 3) - x(-2x + 4)]}{(-x^2 + 4x - 3)^2}$$

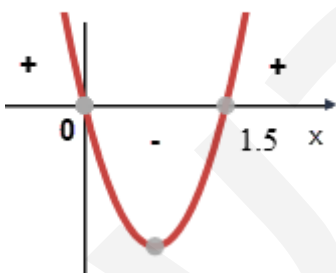
$$f'(x) = \frac{x(-2x^2 + 8x - 6 + 2x^2 - 4x)}{(-x^2 + 4x - 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(4x - 6)}{(-x^2 + 4x - 3)^2}$$

$$0 = 3x(x - 4)$$

$$x = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$4x - 6 = 0 \rightarrow x = 1.5 \rightarrow (1.5, 3)$$

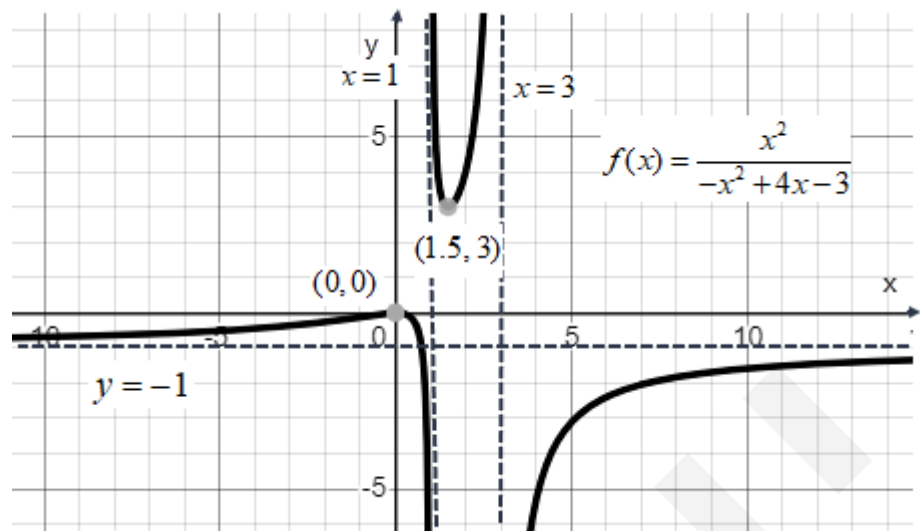


כאשר המונה הוא ביטוי של פרבולה ישרה, בעלת מינימום ("צוחקת") נמצא את סוג נקודות הקיצון (מכנה הנגזרת חיובי), בעזרת ציור גרף סימני $f'(x)$, כאשר מכנה הנגזרת חיובי והמונה הוא ביטוי אלגברי של פרבולה ישרה ("שמחה").

	0		1		1.5		x
	+		-		-		$f'(x)$
	↗	Max	↘		↗	Min	מסקנה

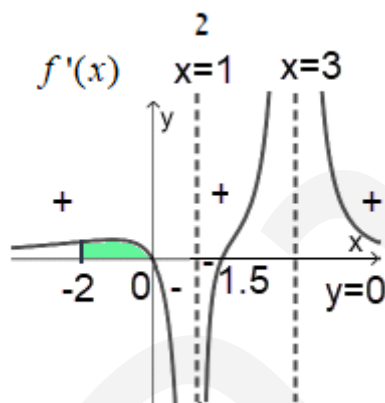
תשובה: (1.5, 3) מינימום, (0, 0) מקסימום.

ג. סקיצה של גרף הפונקציה



ד. (1) כאשר מצירים, או בוחרים את גרף הנגזרת $f'(x) = \frac{x(4x-6)}{(-x^2+4x-3)^2}$, נעזרים בשיקולים הבאים:

- תחום הגדרה: $x \neq 3, x \neq 1$
- אסימפטוטות: $x=1, x=3, y=0$
- נקודות אפס: $(0,0), (1.5,0)$
- סימני נגזרת, בהתאם לעלייה/ירידה של $f(x)$, שרשומים כבר בטבלה.



- $f'(x) > 0$ כאשר $x < 0$ או $1.5 < x < 3$ או $x > 3$
- $f'(x) < 0$ כאשר $0 < x < 1$ או $1 < x < 1.5$

תשובה: הגרף המתאים הוא גרף 2.

(2) נחשב את השטח המבוקש (צבוע בירוק):

$$S = \int_{-2}^0 (f'(x) - 0) dx = f(x) \Big|_{-2}^0$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \quad f(0)=0 \\ x=-2 \quad f(-2)=-\frac{4}{15} \end{array} \right\} S = 0 - \left(-\frac{4}{15}\right) = \frac{4}{15} \rightarrow \boxed{S = \frac{4}{15}}$$

תשובה: גודל השטח, המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי הישר $x = -2$,

ועל ידי ציר ה- x , הוא $\frac{4}{15}$.

א. נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + 6x^2 - 9x$.

בנקודה שבה $x = 1$ מתקיים $f'(1) = 0$ כי לפונקציה נקודת קיצון.

$$f'(x) = 3ax^2 + 12x - 9$$

$$0 = 3a \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 9 \leftarrow f'(1) = 0$$

$$0 = 3a + 3$$

$$-3a = 3$$

$$a = -1$$

תשובה: $a = -1$.

ב. נציב $a = -1$, והפונקציה היא $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

(1) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y מתקיים $x = 0$ ושיעורי נקודת החיתוך $(0, 0)$.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y = 0$:

$$0 = -x^3 + 6x^2 - 9x$$

$$0 = x(-x^2 + 6x - 9)$$

$$x = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$-x^2 + 6x - 9 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3, 0)$$

תשובה: $(0, 0)$, $(3, 0)$.

(2) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, ונקבע את סוגן.

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$$

$$0 = -3x^2 + 12x - 9$$

$$x = 3 \rightarrow (3, 0)$$

$$x = 1 \rightarrow (1, -4)$$

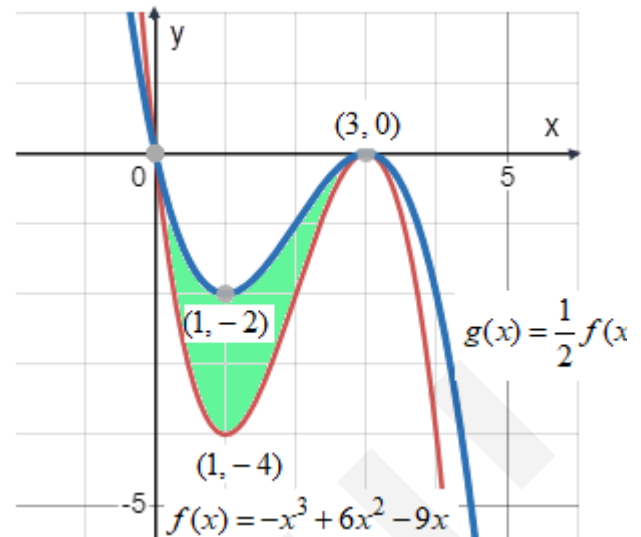
$$f''(x) = -6x + 12$$

$$f''(3) = -6 < 0 \rightarrow (3, 0), \max$$

$$f''(1) = 6 > 0 \rightarrow (1, -4), \min$$

תשובה: $(3, 0)$ מקסימום, $(1, -4)$ מינימום.

(3) סרטוט הפונקציה $f(x)$ (באדום) וגם $g(x)$ (בכחול) עבור סעיף ג, וסימון השטח עבור סעיף ד.



תשובה: הסרטוט מעל.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{2} f(x)$, שתחום ההגדרה שלה הוא גם כל x .

- תחומי חיוביות שליליות ללא שינוי, כי כפלנו במספר חיובי $(\frac{1}{2})$
- תחומי עלייה וירידה ללא שינוי, כי רק הגרף נמתח,

וניתן לראות גם על פי הנגזרת $g'(x) = \frac{1}{2} f'(x)$, שאין שינוי בתחומי עלייה וירידה,

ובשיעורי ה- x שבהם מתאפסת הנגזרת, כאשר שיעורי ה- y מוכפלים פי $(\frac{1}{2})$.

(1) תשובה: $(3, 0)$ מקסימום, $(1, -2)$ מינימום.

(2) תשובה: הסקיצה בראש העמוד, הגרף של $g(x) = \frac{1}{2} f(x)$ בכחול.

ד. נחשב את השטח המבוקש:

$$S = \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^3 (\frac{1}{2} f(x) - f(x)) dx = \int_0^3 (-\frac{1}{2} f(x)) dx$$

$$S = \int_0^3 -\frac{1}{2} (-x^3 + 6x^2 - 9x) dx$$

$$S = \int_0^3 (\frac{1}{2} x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2} x) dx$$

$$S = (\frac{x^4}{8} - \frac{3x^3}{3} + \frac{9x^2}{4}) \Big|_0^3$$

$$\left. \begin{array}{l} x=3: 3.375 \\ x=0: 0 \end{array} \right\}$$

$$S = 3.375 - (0) \rightarrow \boxed{S = 3.375}$$

תשובה: השטח המוגבל הוא 3.375 יח"ר.

- א. אנך למיתר ממרכז המעגל חוצה את המיתר, לכן $AH = BH$.
נביע את BH בעזרת x , במשפט פיתגורס ב- $\triangle OBH$.

$$(OH)^2 + (BH)^2 = (OB)^2$$

$$(BH)^2 = 10^2 - x^2$$

$$BH = \sqrt{100 - x^2}$$

$$AB = 2BH$$

$$AB = 2\sqrt{100 - x^2}$$

תשובה: בסיס המשולש AB הוא $2\sqrt{100 - x^2}$.

- ב. יש למצוא מקסימום לשטח $\triangle ABO$. תחום ההגדרה הוא $0 < x < 10$.

$$S_{\triangle ABO} = \frac{AB \cdot OH}{2}$$

$$S_{\triangle ABO} = \frac{x \cdot 2\sqrt{100 - x^2}}{2}$$

$$S_{\triangle ABO} = x\sqrt{100 - x^2}$$

$$S' = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}$$

$$S' = \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$S' = \frac{-2x^2 + 100}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$-2x^2 + 100 = 0$$

$$x = 5\sqrt{2} \quad \cancel{x = -5\sqrt{2}} \quad \leftarrow 0 < x < 10$$

$$\left. \begin{array}{l} S'(7) > 0 \\ S'(8) < 0 \end{array} \right\} x = 5\sqrt{2}, \max$$

תשובה: $x = 5\sqrt{2}$, עבורו שטח $\triangle ABO$ מקסימלי.

- ב. נמצא את השטח המקסימלי.

$$S(5\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} \sqrt{100 - (5\sqrt{2})^2}$$

$$S(5\sqrt{2}) = 50$$

תשובה: השטח המקסימלי של $\triangle ABO$ הוא 50 יח"ר.