חוברת הכנה

במתמטיקה

4 יחידות לימוד

יואל גבע לא מתפשרים!

חוברת הכנה

במתמטיקה

4 יחידות לימוד

פנימי – בית הספר לבגרות ופסיכומטרי של "יואל גבע"

תוכן עניינים

טכניקה אלגברית

פונקציות וגרפים

משוואות ממעלה ראשונה

משוואות מעלה ראשונה עם נעלם אחד

משוואה מורכבת מתבניות מספר שביניהן מופיע סימן שוויון.
התבנית המופיעה משמאל לסימן השוויון נקראת אגף שמאל של המשוואה, והתבנית המופיעה מימין לסימן השוויון נקראת אגף ימין
של המשוואה.
כדי למצוא ערך של x שעבורו מתקיימת המשוואה עלינו להביא לכך
ש- x יהיה לבדו באחד מאגפי המשוואה.

דוגמה:

פתור את המשוואה $x+5=11$.

פתרון:

כדי ש- x יהיה לבדו באגף שמאל יש "להיפטר" מהמספר 5 .
בין x לבין 5 יש פעולת חיבור ולכן נעבירו לאגף ימין על ידי פעולת החיסור, כלומר נהפוך את סימנו מפלוס למינוס. נקבל: $x=11-5$,
כלומר $x=6$.
נבדוק את הפתרון על ידי הצבת $x=6$ במשוואה המקורית $x+5=11$.
נקבל: $6+5=11$, כלומר $11=11$.
השוויון בין שני האגפים מתקיים, כלומר קיבלנו פסוק אמת ולכן $x=6$
הוא פתרון של המשוואה.

דוגמה:

פתור את המשוואה $2x=10$.

פתרון:

כדי ש- x יהיה לבדו באגף שמאל יש ל"היפטר" מהמספר 2 .
נחלק את שני האגפים ב- 2 . נקבל: $x=\frac{10}{2}$, כלומר $x=5$.

דוגמה:

פתור את המשוואה $3x+6=22-5x$.

פתרון:

מטרתנו היא לרכז את כל האיברים עם x באגף שמאל ואת כל המספרים באגף ימין. לכן נעביר את $-5x$ לאגף שמאל ונשנה את סימנו
ל- $+5x$, וכן נעביר את המספר 6 לאגף ימין ונשנה את סימנו ל- -6 .
נקבל: $3x+5x=22-6$ לאחר כינוס איברים דומים נקבל: $8x=16$
ומכאן $x=2$.

דוגמה:

פתור את המשוואה $6(x+2)-4(x+5)=x-(2-4x)$.

פתרון:

בשלב הראשון נפתח סוגריים.
נקבל: $6x+12-4x-20=x-2+4x$.

נכנס איברים דומים בכל אחד מהאגפים ונקבל: $2x-8=5x-2$.

נרכז את כל הביטויים עם x באגף שמאל ואת כל המספרים באגף ימין.

נקבל: $2x-5x=-2+8$ ומכאן $-3x=6$.

נחלק את המשוואה ב- (-3) ונקבל $x=-2$.

דוגמה:

פתור את המשוואה: $\frac{x-2}{4}-\frac{3x}{2}=\frac{2x-7}{5}-9$.

פתרון:

המכנה המשותף הקטן ביותר של המספרים 2 , 4 ו- 5 הוא 20 .

נכפול את המשוואה במכנה המשותף 20 : $\overset{5/}{\frac{x-2}{4}}-\overset{10/}{\frac{3x}{2}}=\overset{4/}{\frac{2x-7}{5}}-\overset{20/}{9} \quad /\cdot 20$

נקבל: $5(x-2)-10\cdot 3x=4(2x-7)-20\cdot 9$

נפתח סוגריים ונקבל: $5x-10-30x=8x-28-180$

נכנס איברים דומים בכל אחד מהאגפים ונקבל: $-25x-10=8x-208$.

נרכז את הביטויים עם x באגף שמאל ואת המספרים באגף ימין.

נקבל: $-25x-8x=-208+10$, ומכאן $-33x=-198$.

נחלק את שני האגפים ב- (-33) . נקבל: $x=\frac{-198}{-33}$, כלומר $x=6$

וזהו פתרון המשוואה.

תרגילים

פתור את המשוואות הבאות (מצא את ערכו של x):

1. $x-4=3$

2. $6.5+x=4$

3. $2x=12$

4. $-7x=-21$

5. $-x=5$

6. $6x=0$

7. $2x-3=7$

8. $6-4x=5$

9. $1\frac{1}{2}x-4=-10$

10. $8x+14=38+2x$

11. $2x=-x$

12. $6.4+2.5x+2.6=-3.5x$

13. $-50x-10+30x-11-x=0$

14. $\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}-2x=2\frac{1}{4}-5x+16$

15. $7(x+2)+8=43$

16. $-2(x+4)+x=11$

17. $5(x-4)+3(x-1)=57$

18. $9(2x-7)=17-4(x-2)$

19. $7(x-4)-8(x-7)=69-5(x+8)$

20. $7(2x-3)=69-(3x+1)$

21. $6-(-x+7)=0$

22. $8-(2x+1)+(5-x)4=2-(5+3x)7$

23. $5[x+3(x-7)]+8=23$

24. $20-[3x-5(6-x)]=2x-10$

25. $7x+3-2x=19+5x-16$

26. $7(x-2)+9(x+4)=16x+22$

27. $4(2x+1)=8x-9$

28. $19x-15=3(x+8)+16(x-2)$

29. $\frac{x}{5}=8$

30. $\frac{3x}{4}=-6$

31. $\frac{x}{8}=0$

32. $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=7$

33. $\frac{3x}{4}+2=\frac{x}{8}+7$

34. $\frac{x}{12}-\frac{x}{18}=2$

35. $\frac{x}{6}-\frac{x}{12}+\frac{x}{4}=8$

36. $\frac{x}{10}+\frac{3x}{5}=\frac{9x}{20}-\frac{5}{2}$

37. $\frac{1}{3}x+\frac{3}{4}x-\frac{5}{6}x=6$

38. $\frac{x-7}{6}=\frac{1}{2}$

39. $\frac{8x-3}{9}=\frac{7x-2}{8}$

40. $\frac{x-6}{8}+\frac{x+3}{3}=3$

41. $\frac{3x-2}{8}-\frac{2+3x}{6}+\frac{1}{3}=0$

42. $\frac{x-7}{6}+\frac{7x+15}{4}=x+\frac{9x+31}{12}$

43. $\frac{8x+3}{5}-\frac{11x-9}{6}+\frac{4x+3}{15}=\frac{11x+15}{10}$

44. $\frac{4(5x-2)}{3}-\frac{6(3x+2)}{7}=42-\frac{5(7x-4)}{4}$

45. $\frac{8(x+5)}{3}-15=\frac{7(x-2)}{4}-\frac{6(x+2)}{5}$

46. $\frac{3x-1}{5}-(2x-14)=\frac{x+5}{3}$

47. $5(\frac{x}{4}+\frac{x}{6})-3(\frac{x}{8}-\frac{x}{2})=77$

48. $\frac{2}{3}(x+1)-\frac{3}{7}(x+2)=1$

תשובות: **1.** 7 . **2.** -2.5 . **3.** 6 . **4.** 3 . **5.** -5 . **6.** 0 . **7.** 5 . **8.** $\frac{1}{4}$. **9.** -4 . **10.** 4 . **11.**
0 . **12.** -1.5 . **13.** -1 . **14.** 5 . **15.** 3 . **16.** -19 . **17.** 10 . **18.** 4 . **19.** $\frac{1}{4}$. **20.** $5\frac{4}{17}$. **21.**
1 . **22.** -4 . **23.** 6 . **24.** 6 . **25.** כל x . **26.** כל x .
27. אף x . **28.** אף x . **29.** 40 . **30.** -8 . **31.** 0 . **32.** 12 . **33.** 8 . **34.** 72 .
35. 24 . **36.** -10 . **37.** 24 . **38.** 10 . **39.** 6 . **40.** 6 . **41.** -2 . **42.** 0 . **43.** $\frac{3}{4}$.
44. 4 . **45.** -2 . **46.** 7 . **47.** 24 . **48.** 5 .

מערכת של שתי משוואות ממעלה ראשונה

שיטת השוואת המקדמים

הדרך לפתור מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים היא "להיפטר" מאחד הנעלמים ולהישאר עם משוואה אחת בנעלם אחד שאותה אנחנו יודעים לפתור.

קיימות שתי שיטות לפתירת מערכת משוואות: שיטת **השוואת המקדמים** ושיטת **ההצבה**. תחילה נעסוק בשיטת השוואת המקדמים.

בשיטה זו נעזרים בכלל שלפיו ניתן לחבר או לחסר בין שתי משוואות.

דוגמה:

פתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=6 \end{cases}$

פתרון:

נחבר את האיברים שבאגף שמאל ואת האיברים שבאגף ימין.

$$+\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=6 \end{cases}$$

נקבל: $x+x+y-y=10+6$

$$2x=16$$

$$x=\frac{16}{2}=8$$

כדי למצוא את y נציב $x=8$ **באחת** משתי המשוואות (לא משנה באיזו מהן!).
למשל נציב במשוואה $x+y=10$. נקבל: $8+y=10$ ומכאן $y=2$.

תשובה: פתרון מערכת המשוואות הוא $x=8$, $y=2$.

ניתן לכתוב את התשובה גם בצורה $(8;2)$, כאשר המספר בצד שמאל מייצג את הערך של x והמספר בצד ימין מייצג את הערך של y.

הערה: ניתן גם לחסר בין המשוואות וכך לבטל את ה- x.

דוגמה:

פתור את מערכת המשוואות: $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 5x-2y=13 \end{cases}$

פתרון:

אם נחבר את שתי המשוואות לא נגרום לכך שאחד הנעלמים יתבטל.
כדי שנוכל לבטל את אחד הנעלמים עלינו להגיע למקדמים שווים עם סימנים מנוגדים. למשל, אם נרצה לבטל את y צריך להגיע למצב שבו נקבל במשוואה אחת $2y$ ובמשוואה השנייה $-2y$ (זה כבר קיים), לכן נכפול את המשוואה הראשונה ב- 2.

יש לשים לב כי יש לכפול את **כל איברי המשוואה** ב- 2, ובכך לקבל משוואה השקולה למשוואה המקורית.

$$\begin{cases} 2x+y=7 \quad /\cdot 2 \\ 5x-2y=13 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 4x+2y=14 \\ 5x-2y=13 \end{cases}$$

נחבר את המשוואות: נקבל: $9x=27$ ומכאן $x=3$.

נציב $x=3$ במשוואה ראשונה ונקבל: $2\cdot 3+y=7$ ומכאן $y=1$.

תשובה: $x=3$, $y=1$.

דוגמה:

פתור את מערכת המשוואות: $\begin{cases} 2x+7y=-5 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$

פתרון:

כדי להגיע למקדמים שווים בעלי סימנים מנוגדים יש לכפול את **שתי המשוואות**.

אם למשל נבחר לבטל את x , עבור x יש לנו את המקדמים 2 ו- 3 .

אם נכפול את המקדם 2 ב- (-3) ואת המקדם 3 נכפול ב- 2 נקבל $-6x$ ו- $+6x$.

כאשר נחבר את שתי המשוואות הנעלם x יתבטל.

$$\begin{cases} 2x+7y=-5 & /\cdot -3 \\ 3x+2y=1 & /\cdot 2 \end{cases}$$

נחבר את המשוואות. נקבל: $-17y=17$ ומכאן $y=-1$.
$$+\begin{cases} -6x-21y=15 \\ 6x+4y=2 \end{cases}$$

נציב $y=-1$ במשוואה $3x+2y=1$. נקבל: $3x+2(-1)=1$ ומכאן $x=1$.

תשובה: פתרון המערכת הוא $x=1$, $y=-1$. ניתן לרשום $(1;-1)$.

דוגמה:

פתור את מערכת המשוואות: $\begin{cases} 7(x-4)-5(y-7)=20-2y \\ 5(x+2)+8(y-1)=54+2x \end{cases}$

פתרון:

נפתח סוגריים ונקבל: $\begin{cases} 7x-28-5y+35=20-2y \\ 5x+10+8y-8=54+2x \end{cases}$

נעביר את האיברים עם ה- x וה- y לאגף שמאל ואת המספרים לאגף ימין ונכנס איברים דומים. נקבל: $\begin{cases} 7x-3y=13 \\ 3x+8y=52 \end{cases}$

נבחר לבטל את הנעלם y בעזרת שיטת השוואת המקדמים,

לכן נכפול ב- 8 את המשוואה הראשונה וב- 3 את המשוואה השנייה.

נקבל: $\begin{cases} 56x-24y=104 \\ 9x+24y=156 \end{cases}$

"נחבר" את המשוואות נקבל: $56x-24y+9x+24y=104+156$,

כלומר $65x=260$ ומכאן $x=4$. נציב $x=4$ במשוואה המסודרת $7x-3y=13$ ונקבל $y=5$. לסיכום, פתרון המערכת הוא $(4;5)$.

שיטת ההצבה

שיטת ההצבה היא דרך נוספת לפתור מערכת משוואות בשני נעלמים.

גם בשיטה זו, כמו בשיטת השוואת המקדמים, נבטל את אחד הנעלמים אבל נעשה זאת בדרך שונה.

דוגמה:

פתור את מערכת המשוואות
$$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ x=y+1 \end{cases}$$

פתרון:

מהמשוואה השנייה אנו יודעים כי $x=y+1$.

עתה נוכל להציב במשוואה הראשונה את הביטוי $(y+1)$ בכל מקום שבו מופיע x .

בדרך זו נקבל במשוואה הראשונה רק נעלם אחד (y) , ונוכל לפתור את המשוואה.

נציב $x=y+1$ במשוואה הראשונה $2x+3y=12$.

נקבל: $2(y+1)+3y=12$, כלומר $2y+2+3y=12$ ומכאן $y=2$.

נציב $y=2$ במשוואה $x=y+1$. נקבל: $x=2+1$ ומכאן $x=3$.

תשובה : $x=3$, $y=2$.

דוגמה:

פתור בשיטת ההצבה את מערכת המשוואות
$$\begin{cases} 7x-3y=5 \\ 3x+4y=18 \end{cases}$$

פתרון:

מכיוון שהמקדמים של כל הנעלמים שונים מ- 1 ומ- (-1) , אין זה משנה מאיזו משוואה נבודד את הנעלם, בכל מקרה הביטוי שיתקבל יהיה שבר שאינו נוח להצבה.

נבחר לבודד את x מהמשוואה הראשונה:

$$7x-3y=5$$
$$7x=3y+5 \quad /:7$$
$$x=\frac{3y+5}{7}$$

נציב במשוואה השנייה את הביטוי $\frac{3y+5}{7}$ במקום x

ונקבל: $3\cdot\frac{3y+5}{7}+4y=18$

נכפול את 3 במונה השבר:

1/ 7/ 7/
$$\frac{9y+15}{7}+4y=18$$

נכפול במכנה המשותף 7 :
$$9y+15+28y=126$$
$$37y=111 \quad /:37$$
$$y=3$$

נציב $y=3$ בביטוי שבו x מבודד, כלומר במשוואה $x=\frac{3y+5}{7}$.

נקבל: $x=\frac{3\cdot3+5}{7}=2$

תשובה: $x=2$, $y=3$.

הערה: מערכת משוואות כזו בה כל המקדמים של x ו- y שונים מ- 1 או מ- (-1) , מומלץ לפתור בשיטת השוואת המקדמים.

תרגילים

פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת ההצבה:

1. $\begin{cases} x+3y=36 \\ x=6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x-7y=4 \\ y-2=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x+3y=36 \\ x=y+4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 8x+5y=21 \\ y+3=2x \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x+4y=18 \\ x+3y=8 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -x-y=12 \\ 5x-6y=-5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} y=x+5 \\ y=2x+4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} y=-4x+40 \\ y=3x+5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4y=3x-4 \\ 4y=5x-12 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x+4y=36 \\ 8x-7y=4 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 7x+6y=72 \\ 5x+4y=50 \end{cases}$

12. $\begin{cases} -3x+5y=3 \\ 7x-4y=16 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 7x+3y=20 \\ 5x=2y+6 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x-2y=1 \\ y=2x+5 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x+3y=10 \\ 2x+6y=20 \end{cases}$

פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת השוואת המקדמים:

16. $\begin{cases} x+y=11 \\ x-y=5 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 8x+3y=28 \\ 7x-3y=2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} -4x+6y=0 \\ 4x-3y=1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x-4y=12 \\ 7x+y=30 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x+5y=24 \\ -x+8y=30 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x+5y=17 \\ 8x+y=33 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 7x+2y=27 \\ 3x+2y=15 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 5x+3y=29 \\ 7x-5y=13 \end{cases}$

24. $\begin{cases} -4x+9y=79 \\ 3x+4y=16 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 5x-4y=7 \\ -2x-3y=-12 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 5x+4y=18 \\ 7x+6y=26 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 9x-2y=55 \\ 7x-3y=50 \end{cases}$

פתור את מערכות המשוואות הבאות בדרך הנוחה ביותר:

28. $\begin{cases} 5x-3y=20+2x-5y \\ 8x-4y=3x+2y-4 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3(2y-5)=6+x \\ 2(3x-4)=4x-2 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 5(x+3)-7(y-8)=68 \\ y=2x-6 \end{cases}$

31. $\begin{cases} 6-(x+8)=(x+y)2 \\ 5+(y-2)=14-(x+3)4 \end{cases}$

32. $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{5}=1 \\ y-x=4 \end{cases}$

33. $\begin{cases} \frac{x}{6}+\frac{y}{5}=6 \\ \frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1 \end{cases}$

34. $\begin{cases} 3x+\frac{y}{3}=21+2y \\ \frac{x}{4}+5y=11 \end{cases}$

35. $\begin{cases} 7x-2y=15 \\ \frac{2x+3y}{5}-2=\frac{x}{3} \end{cases}$

36. $\begin{cases} \frac{2x-3}{2}+\frac{y+1}{8}=4 \\ \frac{x+1}{3}+\frac{3y-1}{4}=4 \end{cases}$

37. $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{4}=2 \\ \frac{x+y}{5}-\frac{2x-y}{4}=1-\frac{x}{6} \end{cases}$

תשובות: 1. $(6;10)$. **2.** $(6;2)$. **3.** $(6;2)$. **4.** $(2;1)$. **5.** $(2;2)$. **6.** $(-7;-5)$.

7. $(1;6)$. **8.** $(5;20)$. **9.** $(4;2)$. **10.** $(4;4)$. **11.** $(6;5)$. **12.** $(4;3)$. **13.** $(2;2)$.

14. אין פתרון. **15.** אינסוף פתרונות. **16.** $(8;3)$. **17.** $(2;4)$. **18.** $(\frac{1}{2};\frac{1}{3})$.

19. $(4;2)$. **20.** $(2;4)$. **21.** $(4;1)$. **22.** $(3;3)$. **23.** $(4;3)$. **24.** $(-4;7)$. **25.** $(3;2)$. **26.**

$(2;2)$. **27.** $(5;-5)$. **28.** $(4;4)$. **29.** $(3;4)$. **30.** $(5;4)$. **31.** $(0;-1)$.

32. $(6;10)$. **33.** $(12;20)$. **34.** $(8;1.8)$. **35.** $(3;3)$. **36.** $(5;3)$. **37.** $(6;4)$.

פתיחת סוגריים ונוסחאות לכפל מקוצר

פתיחת סוגריים

ראינו כי כפל של חד-איבר בדו-איבר נעשה על פי החוק $a(b\pm c)=ab\pm ac$.

כאשר נרצה לבצע כפל של דו-איבר בדו-איבר, נעשה זאת על פי החוק הבא: $\mathbf{(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd}$

דוגמה: $(x+3)(x+2)=x\cdot x+x\cdot 2+3\cdot x+3\cdot 2=x^2+5x+6$

הנוסחאות לכפל מקוצר

קיימים מקרים בהם אפשר למצוא מכפלה של דו-איבר בדו-איבר גם בדרך קצרה יותר מזו שתוארה לעיל, וזאת בעזרת נוסחאות הנקראות הנוסחאות לכפל מקוצר. נציג שלוש נוסחאות כאלה.

(1) **הנוסחה:** $\mathbf{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$

דוגמה: $(x+6)(x-6)=x^2-6^2=x^2-36$

הערה: ניתן לפתוח את הסוגריים גם ללא הנוסחה.

נקבל: $(x+6)(x-6)=x\cdot x-6x+6x-6\cdot 6=x^2-36$

(2) **הנוסחה:** $\mathbf{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$

דוגמה: $(x+3)^2+x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=x^2+6x+9$

הערה: ניתן לפתוח את הסוגריים גם ללא הנוסחה.

במקרה כזה נסתמך על כך שכל ביטוי בריבוע ניתן להציג במכפלה,

למשל: $8^2=8\cdot 8$, $x^2=x\cdot x$, $(x+3)^2=(x+3)(x+3)$ וכו'.

נקבל: $(x+3)^2=(x+3)(x+3)=x^2+3x+3x+9=x^2+6x+9$

(3) **הנוסחה:** $\mathbf{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$

דוגמה: $(3x-7)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 7+7^2=9x^2-42x+49$

הערה: ניתן לפתוח את הסוגריים גם ללא הנוסחה.

נקבל: $(3x-7)^2=(3x-7)(3x-7)=9x^2-21x-21x+49=9x^2-42x+49$

דוגמה:

פתור את המשוואה $(2x-3)^2-57=4(x^2-12x)$.

פתרון:

נפתח את הביטוי $(2x-3)^2$ לפי הנוסחה $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

נקבל את המשוואה: $(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3+3^2-57=4x^2-48x$

$$4x^2-12x+9-57=4x^2-48x$$

נעביר את כל האיברים לאגף שמאל ונכנס איברים דומים.

נקבל את המשוואה: $36x-48=0$, כלומר $36x=48$ ומכאן $x=\frac{48}{36}=1\frac{1}{3}$.

פתור את המשוואות הבאות:

1. $x(x+8)=x^2+24$

2. $x^2-3x=x(x-5)$

3. $(x-1)(x+4)=x(x-7)$

4. $2(3x+2)(x-1)=(6x-1)(x-4)$

5. $(x+3)^2=x^2+21$

6. $(x-5)^2=x(x+15)$

7. $(3x+5)^2=9(x+2)(x-2)$

8. $(2x+5)(2x-5)=8x^2-(2x+1)^2$

תשובות: 1. 3 . **2.** 0 . **3.** $\frac{2}{5}$. **4.** $\frac{8}{23}$. **5.** 2 . **6.** 1 . **7.** $-2\frac{1}{30}$. **8.** 6 .

משוואות ממעלה שנייה (משוואות ריבועיות)

משוואה ריבועית בנעלם אחד

משוואה שבה הנעלם מופיע בחזקות בעלות מעריכים שלמים, ואשר מעריך החזקה הגבוה ביותר הוא 2 נקראת משוואה ריבועית. למשל המשוואות הבאות הן משוואות ריבועיות: $x^2 = 12$, $x^2 + 3x + 5 = 0$.

באופן כללי, משוואה ריבועית היא משוואה שאפשר להביא אותה לצורה $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ $\mathbf{(a \neq 0)}$, כאשר a , b ו- c הם קבועים , ו- x הוא הנעלם.

a הוא המקדם של x^2 , b הוא המקדם של x , ו- c הוא המספר החופשי.

a הוא מספר שונה מ- 0 , כי כאשר $a = 0$ לא מתקבלת משוואה ריבועית.

למשוואה ריבועית יכולים להיות:

(1) שני פתרונות ממשיים. (2) פתרון אחד ממשי. (3) אף פתרון ממשי.

פתרון של משוואה כזו נקרא שורש של המשוואה.

הפתרונות (השורשים) של המשוואה מסומנים על ידי x_1 ו- x_2 .

כדי למצוא את השורשים של המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ נשתמש בנוסחה הנקראת נוסחת השורשים.

נוסחת השורשים: $$\mathbf{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

דוגמה:

פתור את המשוואה $3x^2 - 7x - 6 = 0$.

פתרון:

לפנינו משוואה ריבועית שבה המקדם של x^2 הוא $a = 3$, המקדם של x הוא $b = -7$ והמספר החופשי הוא $c = -6$.

נציב בנוסחת השורשים ונקבל:

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{49+72}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{7 \pm 11}{6}$$

$$x_1 = \frac{7+11}{6} = \frac{18}{6} = 3 \ , \ x_2 = \frac{7-11}{6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

לסיכום, למשוואה יש שני פתרונות ממשיים והם: $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{2}{3}$.

הערה: ניתן לבדוק כל אחד מהפתרונות שקיבלנו על ידי כך שנציב אותו במשוואה המקורית.

דוגמה:

פתור את המשוואה $3x^2 - 24x + 48 = 0$.

פתרון:

לפנינו משוואה ריבועית שבה $a = 3$, $b = -24$, $c = 48$.

ניתן להציב מקדמים אלה בנוסחת השורשים.

עם זאת, כדאי לשים לב שאם נחלק את שני האגפים ב- 3 , כלומר נצמצם ב- 3 את כל המקדמים, נקבל את המשוואה הריבועית $x^2 - 8x + 16 = 0$ שהמקדמים שלה הם $a = 1$, $b = -8$, $c = 16$.

המשוואה שמתקבלת לאחר הצמצום שקולה למשוואה המקורית והפתרונות שלה זהים לפתרונות של המשוואה המקורית (למרות
שהמקדמים שלה שונים מהמקדמים של המשוואה המקורית).
נציב בנוסחת השורשים את המקדמים של המשוואה שהתקבלה לאחר

הצמצום ונקבל: $x_{1,2}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot1\cdot16}}{2\cdot1}=\frac{8\pm\sqrt{64-64}}{2}=\frac{8\pm0}{2}$

$$x_1=\frac{8+0}{2}=4\ ,\quad x_2=\frac{8-0}{2}=4$$

קיבלנו $x_1=x_2=4$, כלומר שני שורשי המשוואה התלכדו לשורש אחד,
לכן יש למשוואה פתרון אחד והוא $x=4$.

הערה: כאשר המקדם של x^2 הוא שלילי עדיף לחלק את כל המשוואה ב- (-1) ולקבל משוואה שבה a הוא חיובי.

דוגמה:

פתור את המשוואה $-2x^2+5x-4=0$.

פתרון:

דרך א' – המקדמים של המשוואה הריבועית הם: $a=-2$, $b=5$, $c=-4$.

נציב ונקבל: $x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(-2)(-4)}}{2(-2)}=\frac{-5\pm\sqrt{25-32}}{-4}=\frac{-5\pm\sqrt{-7}}{-4}$

הביטוי $\sqrt{-7}$ הוא חסר משמעות, שהרי ל- -7 אין שורש ריבועי ממשי,
לכן למשוואה זו אין פתרון ממשי, כלומר אין לה שורשים ממשיים.

דרך ב' – נחלק את המשוואה ב- (-1) ונקבל את המשוואה הריבועית: $2x^2-5x+4=0$
שמקדמיה הם: $a=2$, $b=-5$, $c=4$.

נציב ונקבל: $x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot2\cdot4}}{2\cdot2}=\frac{5\pm\sqrt{25-32}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{-7}}{4}$

גם בדרך זו קיבלנו שלמשוואה אין שורשים ממשיים.

תרגילים

פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

.1 $x^2+8x+12=0$

.2 $2x^2+9x+9=0$

.3 $x^2+2x-15=0$

.4 $8x^2+3x-5=0$

.5 $x^2-13x+30=0$

.6 $x^2-6x-40=0$

.7 $6x^2-5x-9=0$

.8 $x^2+4x+4=0$

.9 $x^2-2x+1=0$

.10 $9x^2-12x+4=0$

.11 $x^2+8x+17=0$

.12 $2x^2-x+1=0$

.13 $-x^2+9x-18=0$

.14 $-6x^2+13x+8=0$

.15 $-5x^2+x-3=0$

.16 $2x^2-3x-6=0$

.17 א. פתור את המשוואה $x^2-3x-4=0$ ובדוק את תשובתך.
ב. פתור את המשוואה $-x^2+4x-4=0$ ובדוק את תשובתך.

תשובות: **1.** -6 , -2 . **2.** -3 , -1.5 . **3.** -5 , 3 . **4.** -1 , $\frac{5}{8}$. **5.** 3 , 10 . **6.** -4 , 10 . **7.** 1.71 , -0.877 . **8.** -2 . **9.** 1 . **10.** $\frac{2}{3}$. **11.** אין פתרון. **12.** אין פתרון. **13.** 6 , 3 . **14.** $-\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$. **15.** אין פתרון. **16.** 2.637 , -1.137 . **17.** א. 4 , -1 . ב. 2 .

משוואות ריבועיות חלקיות (חסרות)

הצורה הכללית של משוואה ריבועית היא $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$. משוואה ריבועית שבה $b=0$ או $c=0$ (או שניהם שווים לאפס) נקראת משוואה ריבועית חלקית (משוואה ריבועית חסרה).

למשל, במשוואה $x^2-16=0$ לא מופיע איבר עם x , כלומר $b=0$,
לכן זו משוואה ריבועית חסרה. כמו כן, במשוואה $2x^2-5x=0$
לא מופיע מספר חופשי, כלומר $c=0$, לכן זו משוואה ריבועית חסרה.

משוואה ריבועית חסרה ניתן לפתור בעזרת נוסחת השורשים או בדרך נוספת כפי שנסביר בדוגמאות הבאות.

משוואה ריבועית חסרה שבה $b=0$

דוגמה:

פתור את המשוואה: $4x^2-36=0$.

פתרון:

דרך א׳ - נעביר את המספר -36 לאגף ימין. נקבל: $4x^2=36$.

נחלק ב- 4 את שני אגפי המשוואה ונקבל $x^2=9$.

נוציא שורש ריבועי משני האגפים. נקבל: $x=\pm\sqrt{9}$,

כלומר: $x_1=3$, $x_2=-3$.

דרך ב׳ – נציב בנוסחת השורשים: $a=4$, $b=0$, $c=-36$.

נקבל:
$$x_{1,2}=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4\cdot4\cdot(-36)}}{2\cdot4}=\frac{0\pm\sqrt{576}}{8}=\frac{0\pm24}{8}$$

$$x_1=\frac{0+24}{8}=3\ ,\ x_2=\frac{0-24}{8}=-3$$

ניתן לראות שבשתי דרכים קיבלנו אותם הפתרונות.

פתור את המשוואות הבאות:

18. $x^2=16$ **19.** $x^2-25=0$ **20.** $4x^2-144=0$

21. $9x^2-1=0$ **22.** $98x^2-2=0$ **23.** $25x^2-16=0$

24. $3x^2-21=0$ **25.** $x^2=0$ **26.** $x^2+81=0$

תשובות: **18.** -4 , 4 . **19.** -5 , 5 . **20.** -6 , 6 . **21.** $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$. **22.** $\frac{1}{7}$, $-\frac{1}{7}$. **23.** $-\frac{4}{5}$, $\frac{4}{5}$. **24.** $-\sqrt{7}=-2.646$, $\sqrt{7}=2.646$. **25.** 0 . **26.** אין פתרון.

משוואה ריבועית שבה $c=0$

דוגמה:

פתור את המשוואה $8x^2-5x=0$.

פתרון:

דרך א' - נוציא x גורם משותף. נקבל: $x(8x-5)=0$.
כדי שהמכפלה שבאגף שמאל תהיה שווה לאפס,
נדרוש ש- x או $8x-5$ יהיו שווים לאפס.
האפשרות הראשונה היא $x=0$.

האפשרות השנייה היא $8x-5=0$, כלומר $x=\frac{5}{8}$.
לסיכום, פתרונות המשוואה הם: $x=0$ או $x=\frac{5}{8}$.

דרך ב' – נציב בנוסחת השורשים $a=8$, $b=-5$, $c=0$.

נקבל:
$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot8\cdot0}}{2\cdot8}=\frac{5\pm\sqrt{25}}{16}=\frac{5\pm5}{16}$$

$$x_1=\frac{5+5}{16}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8},\ \ x_2=\frac{5-5}{16}=\frac{0}{16}=0$$

ניתן לראות שבשתי הדרכים קיבלנו אותם הפתרונות.

פתור את המשוואות הבאות:

.27 $x^2-5x=0$ **.28** $x^2+4x=0$ **.29** $-x^2-12x=0$

.30 $5x^2+10x=0$ **.31** $5x^2+12x=0$ **.32** $2x^2=7x$

.33 $3x^2+x=0$ **.34** $-x^2-x=0$ **.35** $\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{3}x$

תשובות: **.27** 5, 0 . **.28** -4, 0 . **.29** -12, 0 . **.30** -2, 0 . **.31** $-2\frac{2}{5}$, 0 . **.32** 3.5, 0 . **.33** $-\frac{1}{3}$, 0 . **.34** -1, 0 . **.35** $\frac{2}{3}$, 0 .

משוואות ריבועיות נוספות

פתור את המשוואות הבאות:

.36 $x^2+6=5x$ **.37** $5x^2+20=3x^2+52$

.38 $5x^2+8x-1=8x^2-5x-1$ **.39** $4x^2+20=2x^2+7$

.40 $20=x^2-2x+21$ **.41** $x(x-6)=7$

.42 $3x(x+2)=8(x+1)$ **.43** $34-3(10-x)=x^2$

.44 $2x(x+3)-(x+3)=0$ **.45** $(x+4)(x+7)=70$

.46 $3(x-2)(5-x)=2-(4x+10)$

.47 $(x-4)(x-4)-(4x+5)(3x-10)=17x-110$

.48 $(x+1)^2=1-x^2$ **.49** $(x-3)^2=x(5-x)$

.50 $(3x-1)^2-2(x+1)=0$ **.51** $10+3(x+2)^2=x+14$

.52 $-2(x-5)^2=(2x+1)^2-57$ **.53** $(x+5)^2-(x-6)^2=121$

.54 $44-(x-4)^2=(x+6)(x-6)$ **.55** $(x-6)(x+8)=0$

.56 $(x-3)(x+3)=0$ **.57** $(x-5)^2=0$

.58 $6(3x+1)^2=0$ **.59** $\frac{x^2-10}{6}=15$

.60 $x^2-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}=0$ **.61** $\frac{2}{5}x^2-x+\frac{3}{5}=0$

.62 $\frac{(x+4)(x-2)}{4}=10$ **.63** $6x+\frac{(3x+1)^2}{4}=10$

תשובות: **.36** 2 , 3 . **.37** -4 , 4 . **.38** $4\frac{1}{3}$, 0 . **.39** אין פתרון. **.40** 1 .
.41 -1 , 7 . **.42** $-\frac{4}{3}$, 2 . **.43** -1 , 4 . **.44** -3 , $\frac{1}{2}$. **.45** -14 , 3 . **.46** 1 , $7\frac{1}{3}$. **.47** 4 , -4 .
.48 -1 , 0 . **.49** 1 , 4.5 . **.50** $-\frac{1}{9}$, 1 . **.51** $-2\frac{2}{3}$, -1 . **.52** $-\frac{1}{3}$, 3 . **.53** 6 . **.54** 8 , -4 . **.55** 6 , -8 . **.56** 3 , -3 . **.57** 5 . **.58** $-\frac{1}{3}$. **.59** 10 , -10 .
.60 1 , $-\frac{3}{4}$. **.61** $1\frac{1}{2}$, 1 . **.62** 6 , -8 . **.63** $-4\frac{1}{3}$, 1 .

משוואות ריבועיות עם שני נעלמים

דוגמה:

פתור את מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} y=x^2-7x+3 \\ 2x+5y=-3 \end{cases}$$

פתרון:

נפתור את המערכת בשיטת ההצבה. לפי המשוואה הראשונה $y=x^2-7x+3$. נציב במשוואה השנייה (x^2-7x+3) במקום y .

נקבל: $2x+5(x^2-7x+3)=-3$.

לאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים דומים נקבל את המשוואה הריבועית: $5x^2-33x+18=0$

נציב בנוסחת השורשים ונקבל: $x_1=6$, $x_2=0.6$.

כדי לקבל את y נציב את הפתרונות שהתקבלו במשוואה $2x+5y=-3$.

נציב $x=6$. נקבל: $2\cdot 6+5y=-3$ ומכאן $y=-3$. הפתרון הוא $(6;-3)$.

נציב $x=\frac{3}{5}$. נקבל: $2\cdot\frac{3}{5}+5y=-3$ ומכאן $y=-\frac{21}{25}$. הפתרון הוא $\left(\frac{3}{5};-\frac{21}{25}\right)$.

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

.1 $\begin{cases} y=x^2-8 \\ y=2x \end{cases}$ **.2** $\begin{cases} x^2-6y=28 \\ y+2x=22 \end{cases}$ **.3** $\begin{cases} y=2x^2-3x \\ 2x+y=3 \end{cases}$

.4 $\begin{cases} y=x^2-6x+9 \\ y=\frac{2}{3}x-2 \end{cases}$ **.5** $\begin{cases} y=2x^2-5x+1 \\ 3x+2y=17 \end{cases}$ **.6** $\begin{cases} y=x^2+2x-8 \\ y=-x^2-x+12 \end{cases}$

.7 $\begin{cases} x^2+y=5 \\ x^2-y=3 \end{cases}$ **.8** $\begin{cases} y-x=4 \\ x^2+y^2=40 \end{cases}$ **.9** $\begin{cases} 2x^2-17y^2=-60 \\ x+3y=8 \end{cases}$

.10 $\begin{cases} 3x^2+5xy-4y^2=38 \\ x-y=2 \end{cases}$ **.11** $\begin{cases} 3x^2-5xy+2y^2=33 \\ 4x-3y=14 \end{cases}$ **.12** $\begin{cases} 4x^2-5y=-6 \\ 3x^2+2y=7 \end{cases}$

תשובות: **.1** $(4;8)$, $(-2;-4)$. **.2** $(-20;62)$, $(8;6)$. **.3** $(-1;5)$, $(1.5;0)$.

4. $(3;0)$, $\left(3\frac{2}{3};\frac{4}{9}\right)$. **5.** $(-1.25;10.375)$, $(3;4)$. **6.** $(2.5;3.25)$, $(-4;0)$. **7.** $(2;1)$, $(-2;1)$.
8. $(-6;-2)$, $(2;6)$. **9.** $(2;2)$, $(-274;94)$. **10.** $(-4.5;-6.5)$, $(3;1)$. **11.** $(5;2)$,
$(-19;-30)$. **12.** $(1;2)$, $(-1;2)$.

פירוק לגורמים

קיימות שלוש שיטות עיקריות בעזרתן נבצע פירוק לגורמים:
א. פירוק לגורמים על ידי הוצאת גורם משותף.
ב. פירוק לגורמים על פי נוסחאות הכפל המקוצר.
ג. פירוק לגורמים של תלת-איבר ריבועי – **טרינום**.

שים לב!

בכל פירוק לגורמים השלב הראשון יהיה הוצאת גורם משותף (אם קיים גורם משותף). אחר כך נבחן אפשרות לבצע פירוק על פי נוסחאות הכפל המקוצר או על פי פירוק הטרינום.

פירוק על ידי הוצאת גורם משותף

דוגמה:

פרק לגורמים את התבניות הבאות:

א. $6a^2+12ab$ ב. $8x^3-12x^2$

ג. $-3b^2-6b-9$ ד. $5(m-6)+x(m-6)$

פתרון:

א. הגורם המשותף הגדול ביותר למקדמים המספריים הוא 6
והגורם המשותף הגדול ביותר לאותיות הוא a.
נובע מכך שהגורם המשותף הכולל הוא $6a$.
נוציא $6a$ מחוץ לסוגריים. נקבל: $6a^2+12ab=6a(a+2b)$.
הערה: ניתן לבדוק את נכונות הפירוק על ידי פתיחת הסוגריים שבאגף ימין וקבלת התבנית שבאגף שמאל.
באגף ימין קיבלנו $6a(a+2b)$. נפתח סוגריים ונקבל: $6a^2+12ab$.
קיבלנו את התבנית שבאגף שמאל ולכן הפירוק נכון.

ב. הגורם המשותף הגדול ביותר למקדמים המספריים הוא 4 והגורם המשותף הגדול ביותר לאותיות הוא x^2. נובע שהגורם המשותף הכולל הוא $4x^2$. נוציא $4x^2$ מחוץ לסוגריים ונקבל: $8x^3-12x^2=4x^2(2x-3)$

ג. הגורם המשותף הגדול ביותר למקדמים המספריים הוא -3.
לא קיים גורם משותף לאותיות. לכן נוציא -3 מחוץ לסוגריים.
נקבל: $-3b^2-6b-9=-3(b^2+2b+3)$

ד. הגורם המשותף הוא דו-האיבר $(m-6)$ ואותו נוציא כגורם משותף.
נקבל: $5(m-6)+x(m-6)=(m-6)(5+x)$

תרגילים

פרק לגורמים את התבניות הבאות על ידי הוצאת גורם משותף:

.1 $5a+5b$ **.2** $3x-12$ **.3** $6a+2$

.4 $7x+7$ **.5** $-a-12$ **.6** $6a+9x$

.7 $15b-20$ **.8** $3x+6y+9a$ **.9** $10x+15y-5$

.10 $ax+5x$ **.11** $ab+ac$ **.12** $-ax-ay-a$

.13 x^2+3x **.14** $6a^2-a$ **.15** $2a^2+5a$

.16 x^3-4x **.17** a^3+2a^2 **.18** b^3-2b^2+5b

.19 $ab-abx$ **.20** a^2b+ab^2 **.21** $2x^2+10x$

.22 $6a^2-15a$ **.23** $-3p^2-6p-30$ **.24** $3a^3b-6a^2b^2+9ab^3$

.25 $(a-1)x+(a-1)y$ **.26** $a(x-y)+6(x-y)$

.27 $5x(a+c)-8(c+a)$ **.28** $a(x-4)+5(4-x)$

.29 $2x(b^2-9)-4(b^2-9)$ **.30** $a(x+y)-b(x+y)-x-y$

תשובות: **.1** $5(a+b)$. **.2** $3(x-4)$. **.3** $2(3a+1)$. **.4** $7(x+1)$. **.5** $-(a+12)$. **.6** $3(2a+3x)$. **.7** $5(3b-4)$. **.8** $3(x+2y+3a)$. **.9** $5(2x+3y-1)$. **.10** $x(a+5)$. **.11** $a(b+c)$. **.12** $-a(x+y+1)$. **.13** $x(x+3)$. **.14** $a(6a-1)$. **.15** $a(2a+5)$. **.16** $x(x^2-4)$. **.17** $a^2(a+2)$. **.18** $b(b^2-2b+5)$. **.19** $ab(1-x)$. **.20** $ab(a+b)$. **.21** $2x(x+5)$. **.22** $3a(2a-5)$. **.23** $-3(p^2+2p+10)$. **.24** $3ab(a^2-2ab+3b^2)$. **.25** $(a-1)(x+y)$. **.26** $(x-y)(a+6)$. **.27** $(a+c)(5x-8)$. **.28** $(x-4)(a-5)$. **.29** $2(b^2-9)(x-2)$. **.30** $(x+y)(a-b-1)$.

פירוק על פי הנוסחה להפרש ריבועים

הנוסחה: $\mathbf{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$

בעזרת נוסחה זו, ניתן לפרק לגורמים כל תבנית המוצגת כהפרש בין שני ריבועים.

דוגמה:

פרק לגורמים את התבניות הבאות:

א. k^2-16 ב. $9x^2-25$ ג. $2x^4-18x^2$

פתרון:

א. נציג את התבנית k^2-16 כהפרש בין שני ריבועים. הביטוי k^2 הוא ריבוע של **k** והמספר 16 הוא ריבוע של **4** ולכן $k^2-16=k^2-4^2$.
כעת ניעזר בנוסחה $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ כאשר במקום a נרשום k ובמקום b נרשום 4 . נקבל: $k^2-4^2=(k-4)(k+4)$

ב. נציג את התבנית $9x^2-25$ כהפרש בין שני ריבועים.
הביטוי $9x^2$ הוא ריבוע של $\mathbf{(3x)}$ והמספר 25 הוא ריבוע של **5**
ולכן על-פי הנוסחה נקבל: $9x^2-25=(3x)^2-5^2=(3x-5)(3x+5)$

ג. בשלב הראשון נוציא $2x^2$ גורם משותף. נקבל: $2x^4-18x^2=2x^2(x^2-9)$.
כעת נפרק את הביטוי x^2-9 לפי הנוסחה להפרש ריבועים.
נקבל: $2x^4-18x^2=2x^2(x^2-9)=2x^2(x-3)(x+3)$

פרק לגורמים את התבניות הבאות על פי הנוסחה להפרש ריבועים:

.31 a^2-9 **.32** k^2-4 **.33** x^2-36

.34 $16-a^2$ **.35** $4a^2-25$ **.36** $9-64b^2$

.37 $x^2-\frac{1}{4}$ **.38** $\frac{a^2}{25}-\frac{b^2}{36}$ **.39** $9a^2-\frac{16}{b^2}$

.40 x^2y^2-9 **.41** x^4-36 **.42** $-x^2+49$

.43 $6x^2-6$ **.44** $-3a^2+48$ **.45** a^3-25a

.46 a^3b-ab^3 **.47** $9x^4y^2-49x^2y^4$ **.48** $2x^6-98$

תשובות: **.31** $(a-3)(a+3)$. **.32** $(k-2)(k+2)$. **.33** $(x-6)(x+6)$.
.34 $(4-a)(4+a)$. **.35** $(2a-5)(2a+5)$. **.36** $(3-8b)(3+8b)$. **.37** $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$.
.38 $\left(\frac{a}{5}-\frac{b}{6}\right)\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{6}\right)$. **.39** $\left(3a-\frac{4}{b}\right)\left(3a+\frac{4}{b}\right)$. **.40** $(xy-3)(xy+3)$. **.41** $(x^2-6)(x^2+6)$.
.42 $(7-x)(7+x)$ או $-(x-7)(x+7)$. **.43** $6(x-1)(x+1)$. **.44** $-3(a-4)(a+4)$ או
$3(4-a)(4+a)$. **.45** $a(a-5)(a+5)$. **.46** $ab(a-b)(a+b)$.
.47 $x^2y^2(3x-7y)(3x+7y)$. **.48** $2(x^3-7)(x^3+7)$.

פירוק על פי הנוסחאות לדו-איבר בריבוע

הנוסחאות:

$$\mathbf{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2}$$
$$\mathbf{a^2-2ab+b^2=(a-b)^2}$$

דוגמה:

פרק לגורמים את התבניות הבאות:

א. $x^2+10x+25$ ב. $4p^2-12p+9$ ג. $-2m^3+8m^2-8m$

פתרון:

א. הביטוי השמאלי x^2 הוא ריבוע של $\mathbf{x}$ והמספר הימני 25 הוא ריבוע של המספר $\mathbf{5}$. לכן, ייתכן וניתן לפרק ביטוי זה לפי הנוסחה $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ כאשר במקום a נרשום x, במקום b נרשום 5 ונקבל $x^2+10x+5^2=(x+5)^2$.
כדי לוודא שניתן לעשות, זאת צריך לבדוק האם האיבר האמצעי בתבנית שלנו $(10x)$ מתאים לאיבר האמצעי שבנוסחה $(2ab)$.
נציב ונקבל: $2\cdot\mathbf{x}\cdot\mathbf{5}=10x$ ולכן הפירוק נכון.

ב. הביטוי השמאלי $4p^2$ הוא ריבוע של $\mathbf{2p}$, המספר הימני 9 הוא ריבוע של המספר $\mathbf{3}$ ולכן הפירוק האפשרי הוא $4p^2-12p+9=(2p-3)^2$.
נבדוק האם האיבר האמצעי בתבנית $(-12p)$ מתאים לאיבר האמצעי שבנוסחה $(-2ab)$. נציב ונקבל: $-2\cdot 2p\cdot 3=-12p$ ולכן הפירוק נכון.

ג. בשלב הראשון נוציא $-2m$ גורם משותף. נקבל: $-2m(m^2-4m+4)$
כעת נפרק את הביטוי m^2-4m+4 לפי הנוסחה $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.
נקבל: $-2m(m^2-4m+4)=-2m(m-2)^2$.

פרק לגורמים את התבניות הבאות לפי הנוסחאות לדו-איבר בריבוע:

.49 a^2+6a+9 **.50** $x^2-8x+16$ **.51** $b^2+14b+49$

.52 $c^2-18c+81$ **.53** $4+4a+a^2$ **.54** $64+a^2-16a$

.55 $4a^2+12a+9$ **.56** $9x^2-30x+25$ **.57** $a^2+a+\frac{1}{4}$

58. $4x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{9}$ 59. $a^2+4ab+4b^2$ 60. $9x^2-30xy+25y^2$

61. $-x^2+10x-25$ 62. $-25a^2-1+10a$ 63. x^4+8x^2+16

64. $9a^4-12a^2+4$ 65. b^6+2b^3+1 66. $3x^2-18x+27$

67. $-5b^2+40b-80$ 68. k^3-10k^2+25k 69. $7a^3+14a^2+7a$

70. $x^2y^2-4yx^2+4x^2$ 71. $x^2y^2+20xy+100$ 72. $-2a^3+12a^2b-18ab^2$

תשובות: 49. $(a+3)^2$. 50. $(x-4)^2$. 51. $(b+7)^2$. 52. $(c-9)^2$. 53. $(a+2)^2$.
54. $(a-8)^2$. 55. $(2a+3)^2$. 56. $(3x-5)^2$. 57. $(a+\frac{1}{2})^2$. 58. $(2x-\frac{1}{3})^2$.
59. $(a+2b)^2$. 60. $(3x-5y)^2$. 61. $-(x-5)^2$. 62. $-(5a-1)^2$. 63. $(x^2+4)^2$. 64. $(3a^2-2)^2$. 65. $(b^3+1)^2$. 66. $3(x-3)^2$. 67. $-5(b-4)^2$. 68. $k(k-5)^2$. 69. $7a(a+1)^2$. 70. $x^2(y-2)^2$. 71. $(xy+10)^2$. 72. $-2a(a-3b)^2$.

משוואות עם נעלמים במכנה

בסעיף זה נעסוק במשוואות עם נעלמים במכנה.

השלבים לפתרון משוואה כזו הם:

א. נפרק לגורמים את הביטויים שבמכנים (אם זה אפשרי)

ב. נמצא את המכנה המשותף המינימלי של כל הביטויים שבמכנים.

ג. נכפול את המשוואה במכנה המשותף המינימלי. נקבל משוואה ללא שברים ונמצא את הפתרון או הפתרונות של המשוואה שהתקבלה.

ד. נבדוק האם הפתרון או הפתרונות שקיבלנו מאפסים מכנה. פתרון שמאפס מכנה אינו שייך לתחום ההצבה של המשוואה ולכן יש לבטלו.

דוגמה:

פתור את המשוואה $\frac{10}{x-7}-\frac{9}{x}=4$.

פתרון:

במשוואה זו לא ניתן לפרק לגורמים את הביטויים שבמכנים.

המכנה המשותף המינימלי הוא $x(x-7)$. נכפול את המשוואה במכנה המשותף המינימלי. נקבל: $10x-9(x-7)=4x(x-7)$.

נפתח סוגריים. נקבל: $10x-9x+63=4x^2-28x$ ומכאן $4x^2-29x-63=0$.

פתרונות המשוואה הריבועית שהתקבלה הם $x=9$ או $x=-1.75$.

הפתרון $x=9$ לא מאפס אף מכנה ולכן הוא מתאים.

הפתרון $x=-1.75$ לא מאפס אף מכנה ולכן גם הוא מתאים.

לסיכום, למשוואה יש שני פתרונות והם: $x=9$, $x=-1.75$.

דוגמה:

פתור את המשוואה $\frac{x+2}{x^2-5x}=\frac{3x-1}{x^2-25}$.

פתרון:

נפרק לגורמים את המכנים.

במכנה השמאלי x^2-5x נוציא גורם משותף ונקבל $x(x-5)$.

את המכנה הימני x^2-25 נפרק לפי הנוסחה $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

ונקבל $(x-5)(x+5)$. המשוואה המתקבלת היא: $\frac{x+2}{x(x-5)}=\frac{3x-1}{(x-5)(x+5)}$.

נכפול במכנה המשותף המינימלי שהוא $x(x-5)(x+5)$.

נקבל: $(x+2)(x+5)=x(3x-1)$. נפתח סוגריים, נכנס איברים ונקבל את המשוואה הריבועית $2x^2-8x-10=0$.

פתרונות המשוואה הם $x=-1$ או $x=5$.

הפתרון $x=-1$ לא מאפס אף מכנה ולכן הוא פתרון מתאים.

הפתרון $x=5$ מאפס את המכנה השמאלי (וגם את הימני) ולכן יש לבטלו.

לסיכום: למשוואה פתרון יחיד שהוא $x=-1$.

דוגמה:

פתור את המשוואה $\frac{x-8}{x^2-14x+49}=\frac{2x-1}{x^2-6x-7}$.

פתרון:

נפרק לגורמים את המכנים.

את המכנה x^2-6x-7 נפרק לפי פירוק הטרינום ונקבל $(x-7)(x+1)$.

את המכנה $x^2-14x+49$ נפרק לפי הנוסחה $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

ונקבל: $(x-7)^2$. המשוואה המתקבלת היא: $\frac{x-8}{(x-7)^2}=\frac{2x-1}{(x-7)(x+1)}$

נכפול במכנה המשותף המינימלי שהוא $(x+1)(x-7)^2$.

נקבל: $(x-7)(2x-1)=(x+1)(x-8)$. לאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים נקבל את המשוואה הריבועית $x^2-8x+15=0$.

פתרונות המשוואה הם $x=3$ או $x=5$.

הפתרונות אינם מאפסים אף אחד מהמכנים ולכן שניהם נמצאים בתחום ההצבה של המשוואה.

לסיכום, פתרונות המשוואה הם: $x=3$, $x=5$.

תרגילים

פתור את המשוואות הבאות (ללא פירוק לגורמים):

.1 $\frac{8}{x}=2$

.2 $\frac{1}{x}-\frac{2}{3x}=\frac{1}{6}$

.3 $\frac{10}{x+2}=2$

.4 $\frac{2x-1}{6+x}=\frac{3}{8}$

.5 $\frac{x}{4}=\frac{6}{x-5}$

.6 $x-\frac{6}{x-2}=3$

.7 $\frac{4}{x+2}+1=\frac{x}{3(x+2)}$

.8 $\frac{6x+2}{5}-\frac{3+3x}{4}=\frac{1}{x-2}$

.9 $\frac{4}{x}=\frac{3}{x+9}$

.10 $\frac{3}{x-2}-\frac{7}{4-x}=0$

.11 $\frac{3x+2}{x-1}=\frac{3x-5}{x+2}$

.12 $\frac{5}{x-1}+\frac{8}{x+2}=2$

.13 $\frac{3}{2x-3}+\frac{7}{2x+3}=4$

.14 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{4}{3}$

.15 $\frac{5}{x+3}+\frac{8}{x+6}=\frac{80}{(x+3)(x+6)}$

.16 $\frac{6}{2x-5}-\frac{11}{2x+5}=6-\frac{11}{(2x-5)(2x+5)}$

.17 $\frac{9}{x^2}+\frac{3}{x}=2$

.18 $\frac{7}{0.8x}+\frac{0.75}{0.6x}=2-\frac{100}{x^2}$

.19 $\frac{9}{(x-2)^2}+\frac{3}{x-2}=2$

.20 $\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{4}{x(x-3)}+\frac{2}{3-x}=0$

.21 $4\left(\frac{300}{x}+5\right)-2x=70$

.22 $(x-5)\left(\frac{80}{x}-3\right)=25$

.23 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}$

.24 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+8}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}$

א. רשום את תחום ההצבה של כל אחת מהמשוואות הבאות.

ב. פתור את המשוואות.

25. $\frac{x^2+12}{x-3}=\frac{7x}{x-3}$

26. $\frac{7(x+4)}{2x+8}=x$

27. $\frac{x^2-2x-3}{x-3}=4$

28. $\frac{x^2}{x+5}=\frac{25}{x+5}$

פתור את המשוואות הבאות (היעזר בפירוק לגורמים):

29. $\frac{11-2x}{x-4}=\frac{x+1}{6x-24}$

30. $\frac{x+3}{x^2+6x}=\frac{2}{x+6}$

31. $\frac{6}{x^2+8x}=\frac{x+1}{2x+16}$

32. $\frac{x+5}{5x-15}-\frac{6}{x+1}=\frac{2}{x-3}-1$

33. $\frac{x+13}{6x+8}-\frac{7}{9x+12}=\frac{2}{3}$

34. $\frac{2x+30}{x^2-2x}=\frac{3}{2-x}$

35. $\frac{6}{x-2}=\frac{x+7}{x^2-4}$

36. $\frac{1}{x-3}+\frac{7}{x+3}=\frac{14}{x^2-9}$

37. $\frac{1}{x-6}+\frac{7-x}{x+6}=\frac{13}{x^2-36}$

38. $\frac{8}{x+5}-\frac{32}{x^2-25}=2-\frac{2}{x-5}$

39. $\frac{2x}{x^2-25}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{6}$

40. $\frac{3}{2x-4}-\frac{3x}{x^2-4}+\frac{2x+1}{2x+4}=0$

41. $\frac{2x+1}{2x-3}-\frac{7x}{4x^2-9}=1+\frac{x-4}{2x+3}$

42. $\frac{2x-1}{x^2-16}=\frac{3}{3x-12}$

43. $\frac{3}{x^2-9}+\frac{11}{2x+6}=1$

44. $\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{2x-1}{3x+3}=\frac{1}{3x-3}$

45. $\frac{x-3}{2x-10}-\frac{9x+57}{10x+50}=\frac{x-7}{x^2-25}$

46. $\frac{5}{x^2-4x}+\frac{45}{x^2+4x}=\frac{18}{x^2-16}$

47. $\frac{20}{x^2-8x}-\frac{x-10}{x^2+8x}=\frac{36}{x^2-64}$

48. $\frac{3}{x^2+x}+\frac{1}{2x-2}=\frac{3}{x^2-1}$

49. $\frac{x+12}{2x(x-2)}-\frac{6}{x+2}=\frac{6}{x^2-4}-\frac{2}{x}$

50. $\frac{24-3x}{x^2-6x}+\frac{7}{x+6}=\frac{14}{x^2-36}$

51. $\frac{1}{2x^2-5x}-\frac{2}{4x^2-25}=\frac{11x-18}{6x^2+15x}$

52. $\frac{8}{3x-3}-\frac{5}{2-2x}=\frac{x+2}{x-1}-\frac{5}{18}$

53. $\frac{8}{x^2-9}+\frac{5}{3x+9}+\frac{1}{3-x}=0$

54. $\frac{1}{2x+2}+\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{1-x^2}=0$

55. $\frac{x-6}{x^2-25}=\frac{11}{x+5}+\frac{15-2x}{15-3x}$

56. $\frac{10}{9x^2-4}-\frac{1+x}{4-6x}=\frac{11x+4}{3x+2}$

57. $\frac{6-x}{3x^2-12}-\frac{2}{x-2}=1$

58. $\frac{7}{6x+9}-\frac{7}{12x^2-27}=\frac{1}{2x-3}-1$

תשובות: **1.** 4. **2.** 2. **3.** 3. **4.** 2. **5.** 8, -3. **6.** 5, 0. **7.** -9. **8.** 3, $-\frac{2}{9}$.
9. -36. **10.** 2.6. **11.** $\frac{1}{16}$. **12.** $-\frac{1}{2}$, 6. **13.** $-\frac{3}{4}$, 2. **14.** $-\frac{1}{2}$, 2. **15.** 2.
16. $-3\frac{5}{12}$, 3. **17.** -1.5, 3. **18.** 10, -5. **19.** $\frac{1}{2}$, 5. **20.** 1.5, 4. **21.** -40, 15.

22. 10 , $13\frac{1}{3}$. **23.** 2 , $-1\frac{3}{7}$. **24.** 4 , $\frac{4}{7}$. **25.** א. $x \neq 3$. ב. 4 . **26.** א. $x \neq -4$.
ב. 3.5 . **27.** א. $x \neq 3$. ב. אין פתרון. **28.** א. $x \neq -5$. ב. 5 . **29.** 5 . **30.** 3 .
31. 3 , -4 . **32.** $2\frac{1}{3}$, 5 . **33.** 1 . **34.** -6 . **35.** -1 . **36.** 4 . **37.** 7 . **38.** 2 , 3 . **39.** 1 . **40.**
1 . **41.** 6 , 0 . **42.** 5 . **43.** 1 , $4\frac{1}{2}$. **44.** $\frac{4}{5}$, 0 . **45.** -10 , 7 . **46.** 5 . **47.** 10 . **48.** -3 , 2 .
49. $-\frac{2}{7}$, 4 . **50.** 4.5 , 8 . **51.** 3 , $1\frac{3}{22}$. **52.** 4 . **53.** 0 . **54.** 2 . **55.** 6 , -18.5 . **56.** $-\frac{38}{63}$,
1 . **57.** -3 , $\frac{2}{3}$. **58.** $-2\frac{2}{3}$, 2 .

משוואות ממעלה שלישית ומעלה

בסעיף זה נעסוק במשוואות ממעלה שלישית ויותר. למשל, המשוואות הבאות הן ממעלה שלישית ויותר: $x^3-9x=0$, $16x^4-1=0$.
תחילה נפתור משוואות שבהן אין איבר חופשי ולכן ניתן להוציא x (או יותר) כגורם משותף.

דוגמה:

פתור את המשוואה $x^3=4x$.

פתרון:

נרכז כל האיברים באגף שמאל ונקבל: $x^3-4x=0$. נוציא x כגורם משותף. נקבל: $x(x^2-4)=0$. נשווה לאפס כל אחד מגורמי המכפלה.
(1) נשווה את x לאפס, כלומר $x=0$.
(2) נשווה את x^2-4 לאפס, כלומר $x^2-4=0$ ומכאן $x=2$ או $x=-2$.
לסיכום, פתרונות המשוואה הם: $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-2$.

פתור את המשוואות הבאות:

1. $x^3-9x=0$ **2.** $x^3=16x$ **3.** $5x^3-20x=0$

4. $x^3+4x=0$ **5.** $x^3-7x^2+10x=0$ **6.** $x^3+2x^2=8x$

7. $6x+x^3-7x^2=0$ **8.** $x^3-4x^2+4x=0$ **9.** $x^3+25x=10x^2$

10. $x^3-8x^2+17x=0$ **11.** $3x^3+10x-2x^2=0$ **12.** $x^3-4x^2=0$

13. $4x^3=8x^2$ **14.** $x^4-x^3=0$ **15.** $-5x^4-20x^3=0$

16. $3x^4-108x^2=0$ **17.** $x^4+8x^3+15x^2=0$ **18.** $3x^5-48x^3=0$

19. $x(x+2)^2=2x^2+19x$ **20.** $x(x-3)^2=(x+4)^2-11.25x-16$

שים לב!

כדי לפתור משוואה שניתן להביאה לצורה $x^n=b$ (n מספר טבעי) ניעזר בכללים הבאים:
א. כאשר n אי-זוגי, למשוואה יש פתרון אחד והוא $x=\sqrt[n]{b}$.
ב. כאשר n זוגי:
(1) אם b חיובי, יש למשוואה שני פתרונות ממשיים והם $x=\pm\sqrt[n]{b}$.
(2) אם $b=0$, אז $x=0$, כלומר למשוואה יש פתרון ממשי אחד.
(3) אם $b<0$, אז אין למשוואה פתרון ממשי. הסיבה לכך היא שלמספר שלילי לא ניתן להוציא שורש ממשי מסדר זוגי.

דוגמה:

פתור את המשוואה $x^3-8=0$.

פתרון:

נעביר את המספר -8 לאגף ימין. נקבל $x^3=8$.

נוציא שורש שלישי משני האגפים. מאחר וזהו שורש אי-זוגי נקבל פתרון אחד והוא: $x=\sqrt[3]{8}$,

כלומר $x=2$. לסיכום, פתרון המשוואה הוא $x=2$.

דוגמה:

פתור את המשוואה $2x^6-162x^2=0$.

פתרון: תחילה נוציא $2x^2$ כגורם משותף. נקבל: $2x^2(x^4-81)=0$.

נשווה לאפס כל אחד מחלקי המכפלה.

(1) נפתור $2x^2=0$. נחלק ב- 2 את שני האגפים.

נקבל $x^2=0$, כלומר $x=\pm\sqrt[2]{0}$ ומכאן $x=0$.

(2) נפתור $x^4-81=0$. נעביר את המספר 81 לאגף ימין. נקבל: $x^4=81$.

נוציא שורש רביעי משני האגפים. מאחר וזהו שורש זוגי קיימים שני פתרונות. נקבל: $x=\pm\sqrt[4]{81}$ ומכאן $x=\pm3$.

לסיכום, פתרונות המשוואה הם: $x=0$, $x=3$, $x=-3$.

פתור את המשוואות הבאות:

.21 $x^3=27$ **.22** $x^4=81$ **.23** $x^5-32=0$

.24 $3x^6-192=0$ **.25** $x^3=-125$ **.26** $2x^5+64=0$

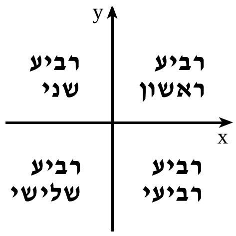
.27 $x^4-64x=0$ **.28** $125x^4+x=0$ **.29** $x^5=81x$

.30 $27x^5+8x^2=0$ **.31** $x^4=9$ **.32** $x^3=10$

תשובות: **.1** -3 , 3 , 0 . **.2** -4 , 4 , 0 . **.3** -2 , 2 , 0 . **.4** 0 . **.5** 5 , 2 , 0 .
.6 -4 , 2 , 0 . **.7** 6 , 1 , 0 . **.8** 2 , 0 . **.9** 5 , 0 . **.10** 0 . **.11** 0 . **.12** 4 , 0 .
.13 2 , 0 . **.14** 1 , 0 . **.15** 0 , -4 . **.16** -6 , 6 , 0 . **.17** -5 , -3 , 0 .
.18 -4 , 4 , 0 . **.19** -5 , 3 , 0 . **.20** 3.5 , 0 . **.21** 3 . **.22** ±3 . **.23** 2 . **.24** ±2 . **.25** -5 .
.26 -2 . **.27** 0 , 4 . **.28** 0 , $-\frac{1}{5}$. **.29** 0 , 3 , -3 . **.30** 0 , $-\frac{2}{3}$.
.31 $\pm\sqrt{3}$. **.32** 2.154 .

פונקציות וגרפים

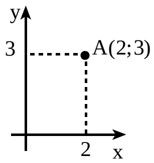
מבוא – מערכת צירים



מערכת הצירים מורכבת משני צירים
המאונכים זה לזה. הציר האופקי נקרא
ציר ה- x והציר האנכי נקרא ציר ה- y .

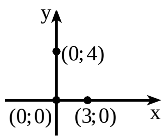
מערכת הצירים מחלקת את המישור
ל- 4 רביעים שמיקומם הוא כמתואר בציור.

כל נקודה במישור מסומנת על-ידי שני מספרים.
הסימון של כל נקודה הוא $(x;y)$ כאשר המספר השמאלי הוא שיעור
ה- x של הנקודה והמספר הימני הוא שיעור ה- y של הנקודה.
למשל, בנקודה $(5;6)$ שיעור ה- x הוא 5 ושיעור ה- y הוא 6 .



במערכת הצירים שלפניך מסומנת נקודה A .
שיעור ה- x שלה הוא 2
ושיעור ה- y שלה הוא 3 .
הסימון של נקודה זו הוא $(2;3)$.

שיעור ה- x של כל אחת מהנקודות הנמצאות על ציר ה- y שווה ל- 0 .
שיעור ה- y של כל אחת מהנקודות הנמצאות על ציר ה- x שווה ל- 0 .



למשל: הנקודה $(0;4)$ נמצאת על ציר ה- y
והנקודה $(3;0)$ נמצאת על ציר ה- x (ראה ציור).

נקודת המפגש בין שני הצירים נקראת
ראשית הצירים ושיעוריה הם $(0;0)$.

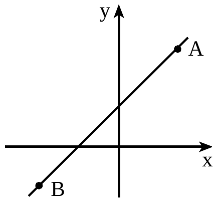
הקו הישר

התיאור הגרפי של משוואה ממעלה ראשונה הוא קו ישר.
למשל, הגרף המתאר את המשוואות: $y=2x+1$, $x+3y=10$ הוא קו ישר.

מציאת נקודות על הישר

כאשר נקודה נמצאת על ישר, שיעוריה מקיימים את משוואת הישר.

דוגמה:



על גרף הישר $y=x+3$ המתואר בשרטוט
מסומנות הנקודות A ו- B .
א. שיעור ה- x של הנקודה A הוא 5 .
מצא את שיעור ה- y של הנקודה.
ב. שיעור ה- y של הנקודה B הוא -3 .
מצא את שיעורי הנקודה B .
ג. בדוק האם הנקודות $(4;7)$ ו- $(6;8)$ נמצאות על הישר הנתון.

פתרון:

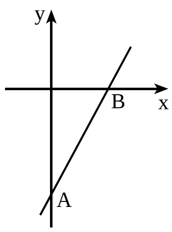
א. הנקודה A נמצאת על הישר $y=x+3$. נציב $x=5$ במשוואת הישר.
נקבל: $y=5+3=8$, לכן שיעור ה- y של הנקודה A הוא 8 .

ב. הנקודה B נמצאת על הישר $y=x+3$. נציב $y=-3$ במשוואת הישר.
נקבל: $-3=x+3$, כלומר $x=-6$ ומכאן $B(-6;-3)$.

ג. כדי לבדוק האם נקודה נמצאת על ישר נציב את שיעורי הנקודה במשוואת הישר. אם נקבל אותו ערך בשני האגפים, הרי שהנקודה נמצאת על הישר.
נבדוק את הנקודה $(4;7)$. נציב $x=4$, $y=7$ במשוואה $y=x+3$.
נקבל: $7=4+3$, כלומר $7=7$ ומכאן שהנקודה נמצאת על הישר.
נעבור לבדוק את הנקודה $(6;8)$. נציב $x=6$, $y=8$ במשוואה $y=x+3$. נקבל: $8=6+3$, כלומר $8=9$.
לא מתקיים שוויון ולכן הנקודה אינה נמצאת על הישר.

נקודות חיתוך של ישר עם הצירים

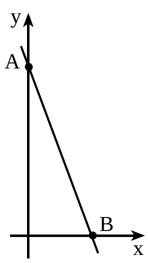
ראינו כי שיעור ה- y של כל הנקודות הנמצאות על ציר ה- x הוא 0 , לכן כדי למצוא את נקודת החיתוך של ישר עם ציר ה- x נציב $y=0$ במשוואת הישר. כמו כן שיעור ה- x של כל הנקודות הנמצאות על ציר ה- y הוא 0 , לכן כדי למצוא את נקודת החיתוך של ישר עם ציר ה- y נציב $x=0$ במשוואת הישר.



דוגמה:

בשרטוט שלפניך מתואר הישר $y=2x-4$.
A היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y
ו- B היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- x .
מצא את שיעורי הנקודות A ו- B .

פתרון: A היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y
ולכן שיעור ה- x שלה הוא 0 . נציב $x=0$ במשוואה $y=2x-4$.
נקבל: $y=2\cdot 0-4=-4$, לכן שיעורי הנקודה A הם $(0;-4)$.
B היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- x ולכן שיעור ה- y שלה הוא 0 . נציב $y=0$ במשוואה $y=2x-4$. נקבל: $0=2x-4$, כלומר $x=2$, לכן שיעורי הנקודה B הם $(2;0)$.



.5 בציור שלפניך מתואר הקו הישר $y=-4x+20$.
הנקודות A ו- B הן נקודות החיתוך של הישר עם הצירים (ראה ציור).
מצא את שיעורי הנקודות A ו- B .

תשובה: $A(0;20)$, $B(5;0)$.

.6 מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הישרים הבאים:

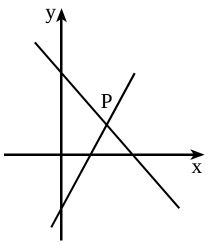
א. $y=3x-12$ ב. $y=8x-2$ ג. $x+y=-5$
ד. $y=5x$ ה. $x=4$ ו. $y=-2$

תשובות: א. $(0;-12)$, $(4;0)$. ב. $(0;-2)$, $(\frac{1}{4};0)$. ג. $(0;-5)$, $(-5;0)$.
ד. $(0;0)$. ה. $(4;0)$. ו. $(0;-2)$.

מציאת נקודת חיתוך בין שני ישרים

כאשר נקודה נמצאת על ישר, שיעוריה מקיימים את משוואת הישר, לכן כאשר נקודה היא נקודת חיתוך של שני ישרים, שיעוריה מקיימים את המשוואות של שני הישרים. נסיק מכך כי כדי למצוא את שיעורי נקודת החיתוך בין שני ישרים נפתור את מערכת המשוואות של שני הישרים. פתרון המערכת הוא שיעורי נקודת החיתוך.

דוגמה:



בציור שלפניך מתוארים הישרים $y = 2x - 3$ ו- $y = -x + 6$.
מצא את שיעורי נקודת החיתוך בין שני הישרים (הנקודה P שבציור).

פתרון:

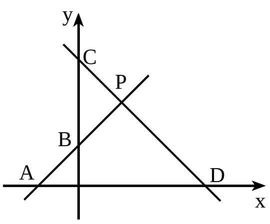
נקודת החיתוך בין שני הישרים היא פתרון המערכת:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -x + 6 \end{cases}$$

נקבל: $2x - 3 = -x + 6$, כלומר $3x = 9$ ומכאן $x = 3$.
נציב $x = 3$ במשוואה $y = 2x - 3$. נקבל: $y = 2 \cdot 3 - 3 = 3$,
לכן שיעורי נקודת החיתוך בין הישרים הם $P(3;3)$.

הערה: אם למערכת המשוואות של שני הישרים אין פתרון, הרי אין לישרים נקודה משותפת. במקרה כזה הישרים מקבילים זה לזה.
אם למערכת המשוואות של שני ישרים יש אינסוף פתרונות, יש לישרים אינסוף נקודות משותפות. במקרה כזה הישרים מתלכדים זה עם זה.

.7 משוואת הישר AB היא $y = x + 2$
ומשוואת הישר CD היא $y = -x + 6$.
הנקודה P היא נקודת החיתוך בין שני הישרים.
מצא את שיעורי הנקודה P .



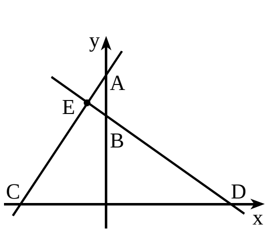
תשובה: $P(2;4)$.

.8 בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונים שני ישרים.
מצא את שיעורי נקודת החיתוך ביניהם.

א. $y = 3x$, $y = -x + 4$.
ב. $y = \frac{1}{2}x + 2$, $y = -x + 8$.
ג. $2x + y = 8$, $x + 3y = 19$.
ד. $3x + 4y = 45$, $3x - 2y = 9$.

תשובה: א. $(1;3)$. ב. $(4;4)$. ג. $(1;6)$. ד. $(7;6)$.

.9 הישרים BD ו- AC הם הגרפים של הפונקציות $3x + 4y = 45$ ו- $2y - 3x = 27$ בהתאמה.
מצא את שיעורי הנקודות A , B , C , D , E .



תשובה: $A(0;13.5)$, $B(0;11.25)$, $C(-9;0)$,
$D(15;0)$, $E(-1;12)$.

פרבולה

פונקציה מהצורה $y=ax^2+bx+c$ (כאשר a , b ו- c הם פרמטרים ו- $a \neq 0$) היא פונקציה ממעלה שנייה. למשל הפונקציות הבאות הן פונקציות ממעלה שנייה: $y=5x^2+2x-1$, $y=x^2-5x$, $y=x^2+4$. פונקציה ממעלה שנייה נקראת גם פונקציה ריבועית.

לגרף המתאר פונקציה ממעלה שנייה קוראים **פרבולה**.

צורת הפרבולה נקבעת על פי ערכו של a , שהוא המקדם של x^2 . קיימות שתי אפשרויות:

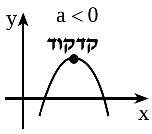
א. כאשר $a>0$, הפרבולה נקראת **ישרה** וצורתה 

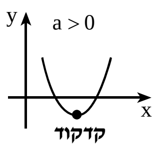
ב. כאשר $a<0$, הפרבולה נקראת **הפוכה** וצורתה 

קדקוד הפרבולה

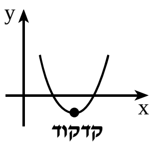
הפרבולה היא התיאור הגרפי של פונקציה מהצורה $y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$.

הנקודה שבה הפונקציה מקבלת את הערך הגדול ביותר או את הערך הקטן ביותר נקראת **קדקוד הפרבולה**.





קיימות נוסחאות למציאת שיעורי קדקוד הפרבולה $y=ax^2+bx+c$ באמצעות המקדמים a , b ו- c .



הנוסחאות:

$$x_{\text{קדקוד}}=\frac{-b}{2a}$$

$$y_{\text{קדקוד}}=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

דוגמה:

מצא את שיעורי הקדקוד של הפרבולה $y=3x^2-6x+1$.

פתרון:

המקדמים הם: $a=3$, $b=-6$ ו- $c=1$. נמצא תחילה את שיעור ה- x של הקדקוד. נציב בנוסחה. נקבל: $x_{\text{קדקוד}}=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-6)}{2\cdot 3}=\frac{6}{6}=1$

שיעור ה- x של קדקוד הפרבולה הוא 1 .

ניתן למצוא את שיעור ה- y של קדקוד הפרבולה בשתי דרכים.

דרך א' - נציב $x=1$ במשוואה $y=3x^2-6x+1$.

נקבל: $y=3\cdot(1)^2-6\cdot 1+1=-2$, לכן שיעורי קדקוד הפרבולה הם $(1;-2)$.

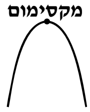
דרך ב' – נציב בנוסחה למציאת שיעור ה- y של הקדקוד.

נקבל: $y_{\text{קדקוד}}=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot 3\cdot 1-(-6)^2}{4\cdot 3}=\frac{-24}{12}=-2$

גם בדרך זו קיבלנו $y=-2$, כלומר שיעורי קדקוד הפרבולה הם $(1;-2)$.

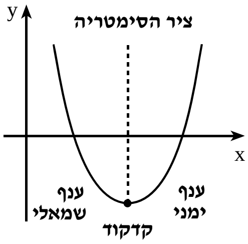
שים לב!

כאשר $a>0$ הפרבולה ישרה, ובנקודת הקדקוד מתקבל הערך הקטן ביותר של הפונקציה (הערך המינימלי). נקודת הקדקוד במקרה זה נקראת **נקודת מינימום**.



כאשר $a < 0$ הפרבולה הפוכה, ובנקודת הקדקוד מתקבל הערך הגדול ביותר של הפונקציה (הערך המקסימלי). נקודת הקדקוד במקרה זה נקראת **נקודת מקסימום**.

שרטוט פרבולה



גרף הפרבולה מורכב משני ענפים.
הענף הימני נמצא מימין לנקודת הקדקוד,
והענף השמאלי נמצא משמאל לנקודת הקדקוד.
הישר המאונך לציר ה- x ועובר דרך קדקוד הפרבולה נקרא **ציר הסימטריה** של הפרבולה (הקו המקווקו שבציור). הענף הימני והענף השמאלי של הפרבולה סימטריים ביחס לישר זה.

כדי לשרטט פרבולה נפעל לפי השלבים הבאים:

א. נמצא את שיעורי נקודת קדקוד הפרבולה.

ב. נמצא מספר נקודות מימין לנקודת הקדקוד, ומספר נקודות משמאל לנקודת הקדקוד.

ג. נסמן את הנקודות במערכת צירים ונחברן באמצעות קו עקום.

דוגמה:

שרטט את גרף הפרבולה $y = x^2 - 6x + 8$.

פתרון:

נמצא תחילה את שיעורי קדקוד הפרבולה, כאשר $a = 1$, $b = -6$, $c = 8$.

נציב בנוסחה למציאת שיעור ה- x של נקודת הקדקוד.

נקבל: $x_{\text{קדקוד}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$

כדי למצוא את שיעור ה- y של נקודת הקדקוד, נציב $x = 3$ במשוואה $y = x^2 - 6x + 8$.

נקבל: $y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1$, לכן שיעורי נקודת הקדקוד הם $(3;-1)$.

נבנה טבלת ערכים ואת נקודת הקדקוד נרשום באמצע הטבלה (מסומן באפור):

x	0	1	2	3	4	5	6
y				-1			

עתה נבחר ערכי x גדולים מ- x קדקוד, כלומר גדולים מ- 3, וערכי x קטנים מ- x קדקוד, כלומר קטנים מ- 3. בגלל תכונת הסימטריה של הפרבולה רצוי לבחור ערכי x המרוחקים במידה שווה משיעור ה- x של הקדקוד. אם למשל מימין ל- $x = 3$ ערכי x גדלים בהדרגה ב- 1, הרי שמשמאל ל- $x = 3$ ערכי x קטנים בהדרגה ב- 1.

את ערכי x שקבענו בטבלה נציב בפונקציה $y = x^2 - 6x + 8$ ונקבל את ערכי y בהתאמה.

עבור $x = 4$ נקבל: $y = (4)^2 - 6 \cdot 4 + 8 = 0$
עבור $x = 2$ נקבל: $y = (2)^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 0$

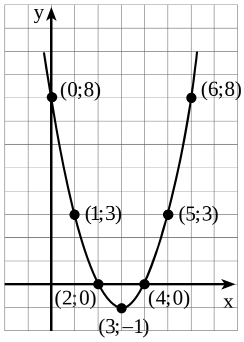
עבור $x = 5$ נקבל: $y = (5)^2 - 6 \cdot 5 + 8 = 3$
עבור $x = 1$ נקבל: $y = (1)^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 3$

עבור $x = 6$ נקבל: $y = (6)^2 - 6 \cdot 6 + 8 = 8$
עבור $x = 0$ נקבל: $y = (0)^2 - 6 \cdot 0 + 8 = 8$

נרשום בטבלה את התוצאות המתקבלות:

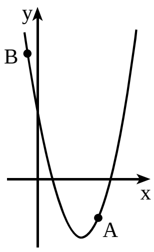
x	0	1	2	3	4	5	6
y	8	3	0	–1	0	3	8

נסמן במערכת צירים את הנקודות שקיבלנו בטבלת הערכים, ונחברן. נקבל את גרף הפרבולה המופיע בשרטוט שמשמאל.



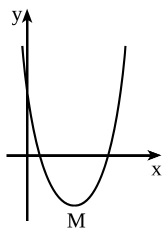
תרגילים

.1 לפניך שרטוט של גרף הפונקציה $y = x^2 - 6x + 5$.
A ו- B הן נקודות על גרף הפונקציה.
א. מצא את שיעור ה- y של הנקודה A
אם שיעור ה- x שלה הוא 4 .
ב. מצא את שיעור ה- y של הנקודה B
אם שיעור ה- x שלה הוא -1 .



.2 נתונה הפונקציה $y = x^2 - 3$. מצא את שיעורי הנקודות הנמצאות על גרף הפונקציה ושבהן שיעור ה- y הוא 6 .

.3 לפניך גרף הפרבולה $y = x^2 - 6x + 5$.
הנקודה M היא קדקוד הפרבולה.
מצא את שיעורי הנקודה M .



מצא את שיעורי הקדקוד של הפרבולות הבאות:

.4 $y = -2x^2 + 5x - 2$ **.5** $y = x^2 + 8x$ **.6** $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

.7 $y = 3x^2$ **.8** $y = (x+5)(x-3)$ **.9** $y = (x-2)^2$

שרטט את הגרפים של הפונקציות הבאות:

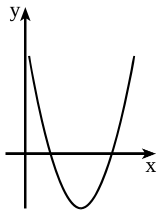
.10 $y = -x^2 + 6x$ **.11** $y = x^2 - 4x + 5$ **.12** $y = x^2 - 4$

שרטט את הגרפים של הפרבולות הבאות:

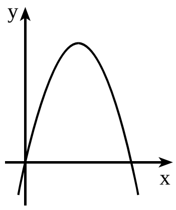
.13 $y = x^2 - 2x - 3$ **.14** $y = -x^2 + 2x$ **.15** $y = x^2 + 3$

.16 $y = -x^2 + 6x - 9$ **.17** $y = (x+4)(x-2)$ **.18** $y = (x-1)^2$

.19 בציור שלפניך משורטט גרף
הפונקציה $y = x^2 - 8x + 12$.
א. מצא את קדקוד הפרבולה
המתארת את הפונקציה.
ב. מהו הערך המינימלי של הפונקציה?

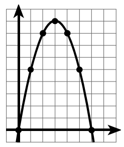


.20 בציור שלפניך משורטט גרף
הפונקציה $y = -x^2 + 6x$.
א. מצא את נקודת המקסימום של הפונקציה.
ב. מהו הערך המקסימלי של הפונקציה?

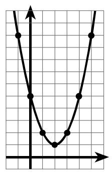


תשובות: .1 א. -3 . ב. 12 . **.2** $(3;6)$, $(-3;6)$. **.3** $(3;-4)$. **.4** $(1.25;1.125)$.
.5 $(-4;-16)$. **.6** $(0;2)$. **.7** $(0;0)$. **.8** $(-1;-16)$. **.9** $(2;0)$.

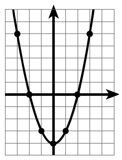
.10



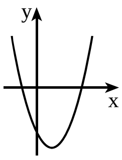
.11



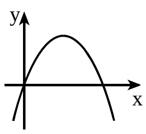
.12



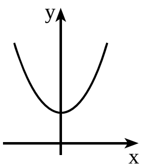
.13



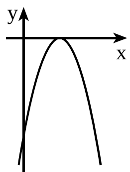
.14



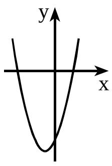
.15



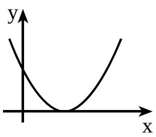
.16



.17



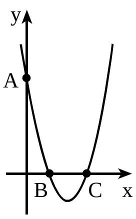
.18



.19 א. $(4;-4)$. ב. -4 . **.20** א. $(3;9)$. ב. 9 .

נקודות החיתוך של פרבולה עם הצירים

דוגמה:



בציור מתואר גרף הפרבולה $y = x^2 - 7x + 10$.
מצא את נקודות החיתוך של הפרבולה
עם הצירים.

פתרון:

הנקודה A שבציור היא נקודת החיתוך של גרף
הפרבולה עם ציר ה- y , ולכן שיעור ה- x שלה הוא 0 .
כדי למצוא את שיעור ה- y של נקודה זו נציב $x = 0$
במשוואה: $y = x^2 - 7x + 10$. נקבל: $y = 0^2 - 7 \cdot 0 + 10 = 10$, כלומר $y = 10$ ולכן
שיעורי הנקודה הם $A(0;10)$.
הנקודות B ו- C שבציור הן נקודות החיתוך של גרף הפרבולה עם
ציר ה- x , ולכן שיעור ה- y שלהן הוא 0 . כדי למצוא את שיעור ה- x בנקודות אלה נציב
$y = 0$ במשוואת הפרבולה $y = x^2 - 7x + 10$.

נקבל את המשוואה הריבועית: $x^2-7x+10=0$.

פתרונות המשוואה הם $x=5$ או $x=2$, לכן שיעורי נקודות החיתוך

של הפרבולה עם ציר ה- x הם $(5;0)$ ו- $(2;0)$.

לסיכום, נקודות החיתוך של הפרבולה עם הצירים הן: $(0;10)$, $(2;0)$, $(5;0)$.

שים לב!

(1) הפונקציה $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ תמיד חותכת את ציר ה- y .

כאשר מציבים בפונקציה $x=0$ מקבלים $y=c$, לכן נקודת החיתוך

עם ציר ה- y תמיד תהיה $(0;c)$.

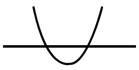
(2) כדי למצוא את נקודות החיתוך של הפונקציה $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

עם ציר ה- x , נציב $y=0$. נקבל את המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$.

אם למשוואה יש שני שורשים ממשיים, אז גרף

הפונקציה חותך את ציר ה- x בשתי נקודות.

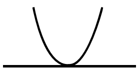
למשל, עבור $a>0$ מתקבל הגרף המתואר משמאל:



אם למשוואה יש שורש ממשי אחד, אז גרף

הפונקציה נוגע בציר ה- x בנקודה אחת.

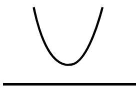
למשל, עבור $a>0$ מתקבל הגרף המתואר משמאל:



אם למשוואה אין שורשים ממשיים, אז גרף

הפונקציה אינו חותך את ציר ה- x .

למשל, עבור $a>0$ מתקבל הגרף המתואר משמאל:

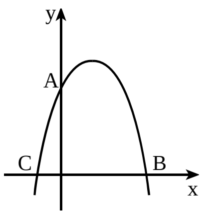


.21 בשרטוט נתון גרף הפרבולה $y=-x^2+3x+4$.

A , B ו- C הם נקודות החיתוך של

הפרבולה עם הצירים (ראה ציור).

מצא את שיעורי הנקודות A , B ו- C .



תשובה: $A(0;4)$, $B(4;0)$, $C(-1;0)$.

.22 מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $y=x^2-4x-5$ עם הצירים.

תשובה: $(0;-5)$, $(-1;0)$, $(5;0)$.

.23 לפניך שרטוט של גרף הפרבולה $y=-x^2+4x-4$.

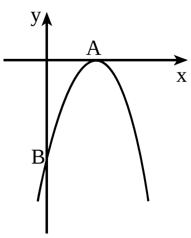
א. מצא את נקודות החיתוך של הגרף עם הצירים.

ב. מצא את מרחק הנקודה A (ראה ציור)

מראשית הצירים.

ג. מצא את מרחק הנקודה B (ראה ציור)

מראשית הצירים.

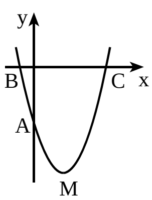


תשובה: א. $A(2;0)$; $B(0;-4)$. ב. 2 . ג. 4 .

.24 בשרטוט נתון גרף הפרבולה $y=x^2-4x-5$.

מצא את שיעורי הנקודות

A , B , C , M (M - קדקוד הפרבולה).



תשובה: $A(0;-5)$, $B(-1;0)$, $C(5;0)$, $M(2;-9)$.

.25 נתונה הפונקציה $y=2x-x^2$.

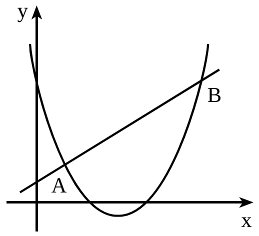
א. מצא את שיעורי קדקוד הפרבולה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

תשובה: א. $(1;1)$. ב. $(2;0)$, $(0;0)$.

נקודות חיתוך של ישר ופרבולה

את נקודות החיתוך בין ישר ופרבולה (או בין שתי פרבולות) אפשר למצוא על-ידי כך שנפתור את מערכת המשוואות של הפרבולה והישר (או שתי הפרבולות).



דוגמה:

בציור מתוארים הגרפים של הפרבולה $y = x^2 - 5x + 6$ והישר $y = x + 1$.

מצא את נקודות החיתוך בין שני הגרפים.

פתרון:

כדי למצוא את שיעורי נקודות החיתוך בין שני הגרפים, נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

נקבל: $x^2 - 5x + 6 = x + 1$ ומכאן $x^2 - 6x + 5 = 0$.

פתרונות המשוואה הם $x = 5$ או $x = 1$. כדי למצוא את שיעור ה- y בכל אחת מן הנקודות, נציב את שיעור ה- x במשוואה $y = x + 1$.

נציב $x = 1$ ונקבל $y = 1 + 1 = 2$. הנקודה היא $(1;2)$.

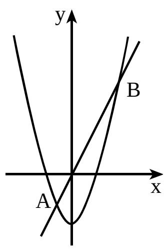
נציב $x = 5$ ונקבל $y = 5 + 1 = 6$ הנקודה היא $(5;6)$.

לסיכום, שיעורי נקודות החיתוך הם: $(1;2)$ ו- $(5;6)$.

שים לב!

אם למערכת המשוואות של הפרבולה והישר יש פתרון אחד, אז הישר משיק לפרבולה, כלומר נוגע בפרבולה בנקודה אחת.

אם למערכת המשוואות של הפרבולה והישר אין פתרון, אז לישר ולפרבולה אין אף נקודה משותפת.

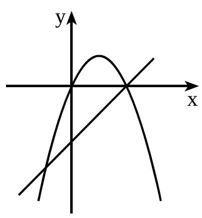


26. נתונה פרבולה שמשוואתה $y = x^2 - 10$ וישר שמשוואתו $y = 3x$.
מצא את נקודות החיתוך בין הפרבולה והישר.
(נקודות A ו- B שבשרטוט).

תשובה: $A(-2;-6)$, $B(5;15)$.

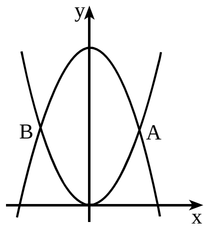
27. נתונים פרבולה שמשוואתה $y = 2x^2 - 3x$ וישר שמשוואתו $2x + y = 3$.
מצא את נקודות החיתוך בין הפרבולה לישר.

תשובה: $(-1;5)$, $(1.5;0)$.



28. בשרטוט נתונים הגרפים של הפונקציות: $y = 2x - x^2$ ו- $y = x - 2$.
א. מצא את שיעורי קדקוד הפרבולה.
ב. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

תשובה: א. $(1;1)$. ב. $(2;0)$, $(-3;-1)$.



29. נתונות שתי פרבולות: $y = x^2$

$y = 18 - x^2$

מצא את נקודות החיתוך בין הפרבולות
(הנקודות A ו- B שבשרטוט).

תשובה: $A(3;9)$, $B(-3;9)$.

בתרגילים שלפניך נתונות שתי פרבולות.
מצא את נקודות החיתוך בין שתי הפרבולות.

30. $y = 2x^2 - 3x$
$y = x^2 + 9x - 32$

31. $y = x^2 - 2x + 3$
$y = x^2 + x - 6$

תשובות: **30.** $(4;20)$, $(8;104)$. **31.** $(3;6)$.